数学物理方程

闫 晗 王金良 李春明◆编著

黑龙江大学出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

责任编辑：张永生　王选宇
封面设计：张广东


ISBN 978-7-81129-752-2

定价：22.00元

数学物理方程

闫 晗 王金良 李春明◆编著

黑龙江大学出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程 / 闫晗, 王金良, 李春明编著. -- 哈尔滨 : 黑龙江大学出版社, 2014.6
ISBN 978-7-81129-752-2

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①闫… ②王… ③李… Ⅲ. ①数学物理方程 Ⅳ. ①O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 115612 号

数学物理方程
SHUXUE WULI FANGCHENG
闫 晗 王金良 李春明 编著

责任编辑 张永生 王选宇
出版发行 黑龙江大学出版社
地 址 哈尔滨市南岗区学府路 74 号
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 720×1000 1/16
印 张 13.75
字 数 270 千
版 次 2014 年 6 月第 1 版
印 次 2014 年 6 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-81129-752-2
定 价 22.00 元

前言

本书是在黑龙江大学数学科学学院原《数学物理方程》基础上，参考国内外一些同类的教材，经过加工和补充编写而成的. 此次修订主要针对以下几个方面:

1. 本书在关于双曲型方程和抛物型方程部分增加了有关解的存在性与稳定性的讨论.

2. 对原书的许多地方进行了精简和改写，以求叙述简便、思路清晰，使得学生能够有条理地正确理解所学内容.

3. 在习题的配置上既注重方法的掌握，同时也考虑到逻辑思维和素质方面的训练.

本书的第 2 章、第 3 章由闫晗编写，第 1 章、第 4 章由王金良编写，习题及全书的统稿工作由李春明完成. 本书的修订再版得到了黑龙江大学数学科学学院领导和同志们的大力支持，特此深表谢意.

由于编者水平有限，书中难免有疏漏和错误之处，敬请读者指正.

编　者

2014 年 5 月

内容简介

本书主要介绍三类典型方程 (双曲型方程、抛物型方程、椭圆型方程) 的导出、定解问题的解法以及三类典型方程的基本理论. 深入浅出地讲述了求解偏微分方程问题的行波法、分离变量法、 Fourier 变换和 Laplace 变换、 Green 函数法，书中配有大量难易兼顾的例题与习题. 本书可作为数学与应用数学、计算数学、物理学、力学等专业本科生以及工科相关专业的研究生的教材和教学参考书使用.

目　录

第 1 章　典型定解问题的提法

数学物理方程的主要研究对象，是来自各种数学物理问题的偏微分方程. 本章将从几个简单的物理模型出发，推导出本课程将要讨论的三种典型方程及其相应的定解问题.

学习这一章，应该搞清楚每个方程和定解条件的实际背景，知道每个有实际意义的偏微分方程的定解问题，是从数量形式上去表述由相应的物理定律所确定的物理量之间的制约关系.

1.1　偏微分方程举例和基本概念

在学习常微分方程的过程中，读者已经知道，所谓常微分方程是由一个自变量和一个未知函数以及这个未知函数的某些阶导数构成的等式. 例如，

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + m^2 x = A\cos\omega t.$$

但在自然界中，许多物理量 (例如温度、速度等) 是随时间及空间位置而变化的，需由以时间坐标 t 及空间坐标 x 为自变量的函数 $u(x,t)$ 来表示，而这些物理量的变化规律，往往用关于时间坐标及空间坐标的某些阶变化率之间的关系式来描述，即可写为函数 u 关于 t 及 x 的某些阶偏导数之间的一些关系式.

所谓偏微分方程，是指含有未知的多元函数及其某些偏导数的关系式. 例如，导热物理的温度函数 $u = u(x,y,z,t)$ 满足的热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,y,z,t), \tag{1.1.1}$$

描述定常过程的 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{1.1.2}$$

弦振动时其位移函数 $u = u(x,t)$ 满足的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.1.3}$$

梁的横振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^4\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f(x,t), \tag{1.1.4}$$

出现于水波研究中的 KdV (Korteweg de Vries) 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + cu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \tag{1.1.5}$$

等等都是偏微分方程.

一般地，对于一个 n $(n \geqslant 2)$ 元函数 $u = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 而言，关于它的偏微分方程的一般形式为

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, Du, D^2u, \cdots, D^N u) = 0, \tag{1.1.6}$$

其中 F 是其变元的已知函数， Du 表示 u 的一阶偏导数

$$Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right),$$

而一般地， $D^k u$ $(k = 2, 3, \cdots, N)$ 表示 u 的 k 阶偏导数

$$D^k u = \left(\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}},\ \sum_{i=1}^n k_i = k,\ k_1, k_2, \cdots, k_n \text{均为非负整数}\right).$$

包含在偏微分方程中的未知函数的偏导数的最高阶数，称为方程的**阶**. 例如，在方程 (1.1.6) 中，若 F 含有 $D^N u$ 项，则方程 (1.1.6) 的阶为 N, 称方程 (1.1.6) 为 N 阶偏微分方程，而称方程 (1.1.1) 为二阶偏微分方程. 特别地，当自变量的个数 $n = 1$ 时，方程 (1.1.6) 化为常微分方程，而一般的偏微分方程则对应于自变量的个数 $n \geqslant 2$ 的情形.

如果一个偏微分方程关于未知函数及其所有偏导数都是线性的，则称其为**线性偏微分方程**, 否则，就称其为**非线性偏微分方程**. 如果一个非线性偏微分方程所含未知函数的一切最高阶偏导数都是线性的，则称其为**拟线性偏微分方程**. 在线性偏微分方程中，不含未知函数及其偏导数的非零项称为**非齐次项**. 或简称为**非齐项**. 不含非齐次项的线性偏微分方程称为**齐次方程**, 也称为**齐方程**, 否则称为**非齐次方程** 或**非齐方程**.

在前面列举的例子中，方程 (1.1.1) 是二阶线性非齐次方程，方程 (1.1.2) 和 (1.1.3) 是二阶线性齐次方程，方程 (1.1.4) 是四阶线性非齐次方程，方程 (1.1.5) 是三阶拟线性方程.

例 1.1.1 方程

$$u\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

为二阶拟线性偏微分方程.

例 1.1.2 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 = 0$$

为二阶非线性偏微分方程.

对于方程 (1.1.6), 什么是它的解呢？设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个区域[①], 如果 u 是在 Ω 中有定义的足够光滑的函数，将它代入式 (1.1.6) 中能使其在 Ω 中恒等地成立，

① 在本教材中，均以 $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间，而 $\mathbb{R}^n$ 中的区域均指开区域.

则称 u 是方程 (1.1.6) 在 Ω 中的一个古典意义下的解，简称**古典解**. 这里需要指出，偏微分方程的解的概念可以用各种各样的方法加以扩充，但上述古典解的概念是最易于理解的，也是本教材着重讨论的对象. 今后，如无特别需要，我们就将古典解称为解.

一个 m 阶偏微分方程在某区域内的 (古典) 解，是指这样的函数：它具有直到 m 阶的一切偏导数，本身和这些偏导数都连续，将它及其偏导数替代方程中的未知函数及其对应的偏导数后，这个方程对其全体自变量在该区域内成为一个恒等式.

一般来说，一个偏微分方程常常有许多解. 为了从一个偏微分方程的许许多多解中找出一个特定的解，就必须引进适当的附加条件，我们称其为**定解条件**. 一个偏微分方程和附加它的定解条件合在一起，称为**定解问题**. 所谓定解问题的解，就是相应的偏微分方程的解中之满足附加的定解条件者.

例 1.1.3 函数 $u(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y$ 是二阶常系数线性方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

的 (古典) 解.

例 1.1.4 函数 $u(x,t)=\mathrm{e}^{-a^2t}\sin x$ 是二阶常系数线性方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

的解.

例 1.1.5 函数 $u(x,t)=F(x-at)+G(x+at)$ 是二阶常系数线性方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{1.1.7}$$

的通解，其中 F 和 G 是任意两个二阶连续可微的单变量函数.

显然函数 $u(x,t)=C_1x+C_2t$ 是方程 (1.1.7) 的 (古典) 解，但不是通解. 这里 C_1 和 C_2 可以是任意常数.

本教材主要研究含一个未知函数的二阶线性偏微分方程，而上述方程 (1.1.1) 、(1.1.2) 、 (1.1.3) 等就是其典型例子. 我们分别称方程 (1.1.1) 、 (1.1.2) 、 (1.1.3) 为热传导方程、 Poisson 方程、波动方程.

习题 1.1

1.1.1 对于下列各偏微分方程，试判断它们是线性的，还是非线性的. 如果是线性的，说明它是齐次的，还是非齐次的，并确定它的阶.

(1) $u\dfrac{\partial u}{\partial x}-2xy\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$;　　(2) $\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$;

(3) $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + u\frac{\partial u}{\partial x} - 1 = 0$;　　(4) $u\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$;

(5) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin x = 0$;　(6) $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2} + \ln u = 0$.

1.1.2 设 $f(v)$ 是一可微函数，证明：函数 $u = f(xy)$ 满足方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

1.1.3 试找出方程 $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y} = 0$ 的所有二阶连续可微的解.

1.1.4 如果函数 $u(x,t) = e^{\alpha x + \rho t}$ 是方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

的解，那么常数 α 和常数 ρ 应满足什么关系式？

1.1.5 设 $f(x)$, $g(y)$ 二次可微，证明 $u = f(x)g(y)$ 满足方程

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

1.1.6 验证单值解析函数 $F(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 的实部满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

其中 $z = x + iy$.

1.1.7 验证函数 $u(x,y,z,t) = f(\alpha x + \beta y + \gamma z + at)$ 是波动方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

的解①，其中 f 为任意二阶连续可微的单变量函数，实常数 α、β、γ 满足 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

1.2　方程的导出及定解条件

自然界中许多物理问题都能归结出微分方程．下面以弦振动问题和热传导问题为例，导出刻画其问题的微分方程.

1.2.1　弦振动方程及定解条件

物理模型　一根长为 l 的均匀细弦，拉紧后让它离开平衡位置，在垂直于弦的外力作用下作微小横向振动 (即弦的运动发生在同一平面内，且弦上各点的位移与平衡位置垂直)，求不同时刻弦线的形状.

弦的往返运动的主要原因是张力的影响和外力的作用．弦在运动中，各点的位移、加速度、张力等都在不断变化，但它们遵循动量守恒定律：物体在某一时段

①这种形式的解称为波动方程的平面波解.

$[t_1,t_2]$ 内的动量的增量等于作用在该物体上所有外力在这一时段内产生的冲量，即

动 量 $t=t_2$	$-$	动 量 $t=t_1$	$=$	所有外力产生的冲量 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$

下面我们应用这个定律建立弦上各点的位移所满足的微分方程.

首先建立坐标系，取弦的平衡位置为 x 轴，在弦线运动的平面内，以垂直于弦线的平衡位置且通过弦线的一个端点的直线为 u 轴 (图 1.2.1).

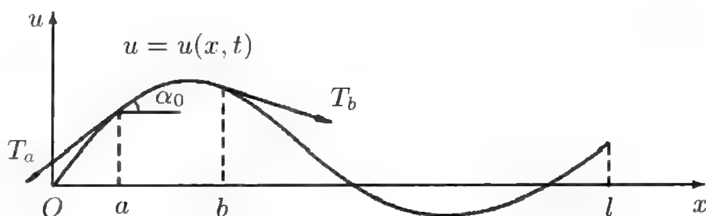


图 1.2.1

记 $u=u(x,t)$ 为弦线在点 x 处、在时刻 t 所发生的位移. 在弦上任意截取一小段弦 $[a,b]$, 考虑它在任意时段 $[t_1,t_2]$ 内动量的变化.

设 ρ 为弦的线密度， $f_0(x,t)$ 为作用在弦线上且垂直于平衡位置的强迫外力密度，从而在任意时刻 t, 弦线 $[a,b]$ 的动量为 $\displaystyle\int_a^b\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)\mathrm{d}x$, 在时段 $[t_1,t_2]$ 内动量的增量为

$$\int_a^b\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)\bigg|_{t=t_2}\mathrm{d}x-\int_a^b\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)\bigg|_{t=t_1}\mathrm{d}x. \tag{1.2.1}$$

为了写出作用在弦线 $[a,b]$ 上所有垂直于弦线的外力产生的冲量，我们来分析作用于弦线 $[a.b]$ 上的外力情况. 事实上，作用在弦上的外力只有外加强迫力和周围弦线通过端点 $x=a$、$x=b$ 作用于弦线 $[a,b]$ 上的张力.

强迫力在时段 $[t_1,t_2]$ 内所产生的冲量为

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int_a^b f_0(x,t)\,\mathrm{d}x, \tag{1.2.2}$$

而作用在端点 $x=a$ 和 $x=b$ 点的张力 $\vec{T}_a$ 和 $\vec{T}_b$, 它们的方向如图 1.2.1 所示，它们在 u 轴方向的分量为

$$\begin{aligned}\vec{T}_a\cdot\boldsymbol{i}_u&=|\vec{T}_a|\cos(\vec{T}_a,\boldsymbol{i}_u)=-|\vec{T}_a|\sin\alpha_a,\\ \vec{T}_b\cdot\boldsymbol{i}_u&=|\vec{T}_b|\cos(\vec{T}_b,\boldsymbol{i}_u)=|\vec{T}_b|\sin\alpha_b,\end{aligned}$$

这里 $\boldsymbol{i}_u$ 表示 u 轴上的单位向量. 由于我们假设弦线是均匀的，弦作微小横振动，故可以认为 $|\vec{T}_a|=|\vec{T}_b|=T_0$(常数), 且

$$|\alpha_a|\ll 1,\ |\alpha_b|\ll 1,\quad \sin\alpha_a\approx\tan\alpha_a,\quad \sin\alpha_b\approx\tan\alpha_b,$$

即

$$-|\vec{T}_a|\sin\alpha_a \approx -|\vec{T}_a|\tan\alpha_a = -T_0\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a},$$
$$|\vec{T}_b|\sin\alpha_b \approx |\vec{T}_b|\tan\alpha_b = T_0\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=b}.$$

因此张力 $\vec{T}_a$ 和 $\vec{T}_b$ 垂直于弦线的分量在时段 $[t_1,t_2]$ 内产生的冲量为

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(T_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=b}-\left(T_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=a}\right]\mathrm{d}t. \tag{1.2.3}$$

由动量守恒定律及 (1.2.1) 、 (1.2.2) 、 (1.2.3) 式可得到小段弦 $[a,b]$ 作微小横振动所满足的方程为

$$\begin{aligned}&\int_a^b\left[\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Big|_{t=t_2}-\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Big|_{t=t_1}\right]\mathrm{d}x\\=&\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(T_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=b}-\left(T_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=a}\right]\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b f_0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

如果假设 u 在区域 $[0,l]\times[0,\infty)$ 上连续，在区域 $(0,l)\times(0,\infty)$ 内存在连续的二阶偏导数，则上式可改写为

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(T_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b f_0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

如果假设 f_0 在区域 $[0,l]\times[0,\infty)$ 上连续，由于 (a,b) 、 (t_1,t_2) 的任意性，可得 u 适合的微分方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(T_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)=f_0.$$

又由于弦是均匀的，故 $\rho=$ 常数，因此上式可改写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), \tag{1.2.4}$$

其中 $a^2=\dfrac{T_0}{\rho}$, $f(x,t)=\dfrac{f_0(x,t)}{\rho}$.

方程 (1.2.4) 刻画了均匀弦的微小横振动的一般规律，我们称其为弦振动方程.

一根弦线特定的振动状况，还依赖于初始时刻弦线的状态和通过弦线的两端所受到的外界的影响. 因此，为了确定一个具体的弦振动，除了列出它满足的方程以外还必须给出它适合的初始条件和边界条件.

初始条件 给出弦上各点在初始时刻的位移和速度，即

$$\begin{cases}u(x,0)=\varphi(x),\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)\qquad(0\leqslant x\leqslant l),\end{cases} \tag{1.2.5}$$

这里 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 为已知函数. 特别当 $\varphi(x)\equiv\psi(x)\equiv 0$ 时，称初始条件为齐次的.

边界条件一般说来有三类.

第一类边界条件 已知弦线端点的位移变化，即

$$\begin{cases} u(0,t)=g_1(t), \\ u(l,t)=g_2(t) \qquad (t\geqslant 0). \end{cases} \tag{1.2.6}$$

特别地，当 $g_1(t)\equiv g_2(t)\equiv 0$ 时，称弦线两端具有固定端点.

第二类边界条件 已知在弦线端点所受垂直于弦线的外力作用，即

$$\begin{cases} -T\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=g_1(t), \\ T\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=g_2(t) \qquad (t\geqslant 0). \end{cases} \tag{1.2.7}$$

特别地，当 $g_1(t)\equiv g_2(t)\equiv 0$ 时，称弦线具有自由端.

第三类边界条件 已知弦线端点的位移与所受外力作用的一个线性组合，即

$$\begin{cases} \left(-T\dfrac{\partial u}{\partial x}+\alpha_1 u\right)\Big|_{x=0}=g_1(t), \\ \left(T\dfrac{\partial u}{\partial x}+\alpha_2 u\right)\Big|_{x=l}=g_2(t) \qquad (t\geqslant 0), \end{cases} \tag{1.2.8}$$

其中 $\alpha_1>0$、$\alpha_2>0$ 分别表示弦线端点支承的弹性系数.

特别地，当 $g_1(t)\equiv g_2(t)\equiv 0$ 时，表示弦的两端固定在弹性支承上.

上述三类边界条件中， $g_1(t)$、$g_2(t)$ 为已知函数，当 $g_1(t)\equiv g_2(t)\equiv 0$ 时，称对应的边界条件为齐次的.

通常把初始条件和边界条件统称为**定解条件**. 描述初始时刻物理状态的定解条件称为初始条件或初值条件，描述边界上物理状态的定解条件称为边界条件或边值条件. 一个方程和与之相应的定解条件就构成定解问题.

在区域 $\{(x,t)\mid 0\leqslant x\leqslant l,\ t\geqslant 0\}$ 上，由方程 (1.2.4) 、初始条件 (1.2.5) 以及边界条件 (1.2.6) 、 (1.2.7) 、 (1.2.8) 中间的任意一个组成的定解问题，称为弦振动方程的混合问题.

例 1.2.1 对两端固定有界弦的受迫振动，其混合问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), \quad 0<x<l,\ t>0, \\ u(0,t)=0,\ \ u(l,t)=0, \quad t\geqslant 0, \\ u(x,0)=\varphi(x), \ \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l. \end{cases}$$

如果对于弦上的某一段，在所考虑的时间内，弦线端点的影响可以忽略不计，那么可以认为弦长是无限的 (即 $-\infty<x<+\infty$), 这样就不必考虑边界条件. 我们把在区域 $\{(x,t)\mid -\infty<x<+\infty,\ t\geqslant 0\}$ 上，由方程 (1.2.4) 和初始条件 (1.2.5) 组成的定解问题称为弦振动方程的初值问题或 Cauchy 问题.

例 1.2.2 对无限长弦的自由振动，其初值问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < +\infty,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

类似地可以给出关于弦振动方程半无界问题的定义.

例 1.2.3 半无限长弦的受迫振动，其混合问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < +\infty,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x < +\infty. \end{cases}$$

方程 (1.2.4) 虽然称为弦振动方程，但绝不仅仅用来描述弦的横振动. 事实上，在工程和物理中，许多由物体的振动产生的波的传播问题同样可以用方程 (1.2.4) 来刻画，因此方程 (1.2.4) 一般也称为一维波动方程.

例 1.2.4* 一根长为 l 的弹性细杆，因外力而产生纵向振动，假设振动过程服从 R.Hooke 定律，试推导弹性杆所满足的微分方程.

解 将弹性细杆横放在 x 轴上，选取坐标系如图 1.2.2. 用 $S(x)$ 表示弹性细杆在点 x 处的横截面，又表示该横截面的面积. 假设在 $S(x)$ 面上，杆是均匀的，其密度记为 $\rho(x)$, 在 $S(x)$ 面上每一点所受力与位移都是相同的，张力密度记为 $\sigma(x,t)$, 方向平行于 x 轴，外力密度记为 $F(x,t)$, 方向平行于 x 轴. 用 $u(x,t)$ 表示在点 x 处的横截面 $S(x)$ 在时刻 t 、沿平行于 x 轴方向的位移，并且假设 $u(x,t)$ 关于变量 x 及 t 二阶连续可微.

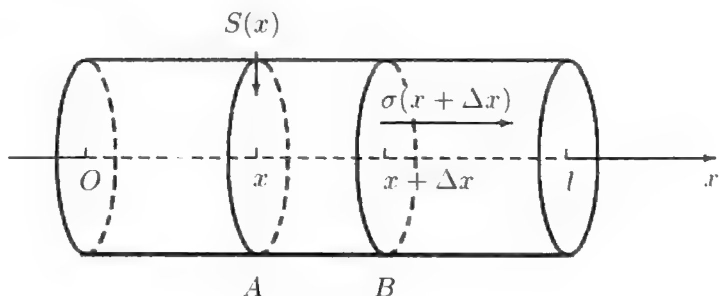


图 1.2.2

下面在假设振动过程中所发生的应力服从 R.Hooke 定律的条件下推导方程.

任取杆的一小段 $[x, x+\Delta x]$, 记为 AB (图 1.2.2). 在时刻 t, 小段 AB 端点的坐标分别为 $x+u(x,t)$, $x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)$, 于是小段 AB 平均伸长率为

$$\frac{[x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)-x-u(x,t)]-\Delta x}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}.$$

在上式中，令 $\Delta x\to 0$, 得到点 x 处横截面 $S(x)$ 的伸长率为 $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$.

由 R.Hooke 定律，在 $S(x)$ 上单位面积因形变引起的弹性应力为

$$\sigma(x,t)=E(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

其中 $E(x)$ 为杨氏模量 (因在 $S(x)$ 上杆是均匀的，故杨氏模量只与 x 有关). 因此小段 AB 所受的应力为

$$\Delta[S(x)\sigma(x)]=S(x+\Delta x)\sigma(x+\Delta x)-S(x)\sigma(x),$$

小段 AB 所受的外力为

$$\int_x^{x+\Delta x}F(x,t)S(x)\mathrm{d}x.$$

假设小段 AB 的质心为 $\overline{x}$, 则质心加速度为

$$\frac{\partial^2 u(\overline{x},t)}{\partial t^2}\quad (x\leqslant\overline{x}\leqslant x+\Delta x),$$

于是由牛顿定律可知，小段 AB 上力的平衡方程为

$$\frac{\partial^2 u(\overline{x},t)}{\partial t^2}\int_x^{x+\Delta x}\rho(x)S(x)\mathrm{d}x=\Delta[S(x)\sigma(x)]+\int_x^{x+\Delta x}F(x,t)S(x)\mathrm{d}x.$$

假设 $S(x)$ 及 $\sigma(x)$ 是一阶连续可微的， $F(x,t)$ 及 $\rho(x)$ 连续，在上式中应用中值定理，两边除以 Δx, 并令 $\Delta x\to 0$, 得

$$\rho(x)S(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\Big[S(x)E(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big]+F(x,t)S(x).$$

如果 $S(x)\equiv$ 常数，则可得

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\Big[E(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big]+F(x,t).$$

再如果弹性细杆是均匀的，即 $\rho(x)\equiv$ 常数，且 $E(x)\equiv$ 常数，则可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\tag{1.2.9}$$

其中

$$a^2=\frac{E}{\rho},\ f(x,t)=\frac{F(x,t)}{\rho}.$$

显然方程 (1.2.9) 与方程 (1.2.4) 有相同的形式.

注1.2.1 如果我们考虑的是膜的振动或者声波在空气中的传播，用来描述这些二维和三维波动现象的微分方程仍然具有和方程 (1.2.4) 相似的形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\Delta u=f,\tag{1.2.10}$$

这里

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

是 Laplace 算子，n 是空间维数. 通常方程 (1.2.10) 称为 n 维波动方程.

例 1.2.5*一块均匀张紧的薄膜，它的静止状态在水平位置 xOy 平面内. 假设膜在外力作用下而产生上下方向的振动，并设在振动时膜的弯曲是极微小的. 用 $u=u(x,y,t)$ 表示膜上点 (x,y) 在时刻 t 的位置偏移，假设振动过程服从 R.Hooke 定律，试推导 u 满足的微分方程.

解 选取坐标系如图 1.2.3. 用 $\rho(x,y)$ 表示膜的密度，$\boldsymbol{T}(x,y,t)$ 表示张力线密度，$F(x,y,t)$ 表示外力密度的模，方向垂直于 xOy 面.

下面在假设振动过程中所发生的张力服从 R.Hooke 定律的条件下推导方程.

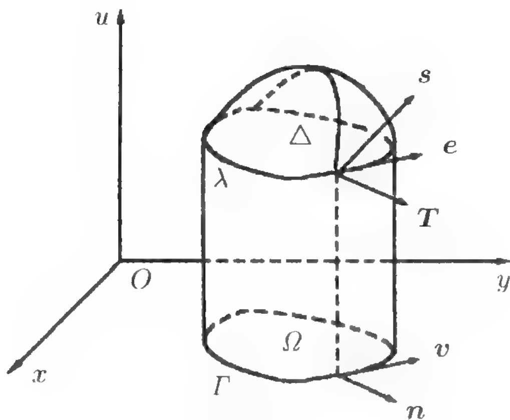


图 1.2.3

在薄膜上任取一个小微元面积，记为 Δ (图 1.2.3)，它在 xOy 平面上的投影为 Ω. 为了写出作用于这小块 Δ 面积上的力在垂直方向的分力，首先求作用在 Δ 上的张力.

设 λ 为 Δ 的边界，它在 xOy 平面的投影为 Γ. 以 $\boldsymbol{e}$ 表示 λ 的切线方向，$\boldsymbol{s}$ 表示 Δ 的法线方向，$\boldsymbol{v}$ 表示 Γ 的切线方向，$\boldsymbol{n}$ 表示 Γ 的法线方向. 因此张力线密度 $\boldsymbol{T}(x,y,t)$ 的方向与 $\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{s}$ 的方向一致.

因为薄膜的弯曲极为微小，所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 很小，可以把 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$. $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 的高阶项忽略不计，于是可以推得 (过程略) 张力线密度的模 $|\boldsymbol{T}(x,y,t)|$ 可近似地看作是与时间及位置无关的常量，即 $|\boldsymbol{T}(x,y,t)|=T_0$ (常数).

由于在时刻 t, 小曲面 Δ 的方程可视为 $u=u(x,y,t)$, 故有

$$\boldsymbol{s}\approx\left(-\frac{\partial u}{\partial x},-\frac{\partial u}{\partial y},1\right),$$

而 $\boldsymbol{e}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 可视为平行向量，故有

$$\boldsymbol{e}\approx\left(\cos(x,\boldsymbol{v}),\cos(y,\boldsymbol{v}),\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{v}}\right)=\left(-\cos(y,\boldsymbol{n}),\cos(x,\boldsymbol{n}),\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{v}}\right),$$

从而 $\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{s}$ 在 u 轴上的分量为

$$(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{s})_u=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(x,\boldsymbol{n})+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(y,\boldsymbol{n})=\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}},$$

因此张力线密度在垂直方向的分量为

$$\boldsymbol{T}_u(x,y,t)=T_0\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=T_0\Big[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(x,\boldsymbol{n})+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(y,\boldsymbol{n})\Big],$$

而沿着曲线 λ, 张力的合力在垂直方向的分量为

$$\int_\Gamma T_0\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s=\int_\Gamma T_0\Big[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(x,\boldsymbol{n})+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(y,\boldsymbol{n})\Big]\mathrm{d}s.$$

另一方面，在曲面 $\triangle$ 上，薄膜所受外力的合力 (合力的模) 为

$$\iint_\Omega F(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

惯性力 (惯性力的模) 为

$$-\iint_\Omega \rho(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

根据牛顿第二定律可得

$$\int_\Gamma T_0\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s+\iint_\Omega F(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_\Omega \rho(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

假设 $u(x,y,t)$ 关于 x, y, t 具有连续的二阶偏导数，利用 Green 公式可得

$$\iint_\Omega\Big[T_0\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)+F(x,y,t)-\rho(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

由 $\triangle$ 的任意性及被积函数的连续性，可得膜的振动方程为

$$\rho(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_0\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)+F(x,y,t).$$

当 ρ 为常数时，记 $a^2=\dfrac{T_0}{\rho}$, $f(x,y,t)=\dfrac{1}{\rho}F(x,y,t)$, 就得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)+f(x,y,t).$$

对于方程 (1.2.10) 同样可以提混合问题和初值问题.

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域，$\partial\Omega$ 是 Ω 的边界，$Q=\Omega\times(0,+\infty)$ 是 $\mathbb{R}^n\times[0,+\infty)$ 中的一个柱体， $\Sigma=\partial\Omega\times[0,+\infty)$ 是柱体 Q 的侧表面.

n 维波动方程的混合问题就是在 $\overline{Q}$ 上定义一个函数 u, 使它在柱体 Q 内适合方程 (1.2.10), 在柱体的下底 $\overline{\Omega}\times\{0\}$ 适合初始条件

$$\begin{cases} u|_{t=0}=\varphi(x_1,\cdots,x_n), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x_1,\cdots,x_n), \qquad (x_1,\cdots,x_n)\in\overline{\Omega}. \end{cases} \tag{1.2.11}$$

在柱体的侧表面 Σ 上适合边界条件

$$u|_{\Sigma} = g(x_1, \cdots, x_n, t) \tag{1.2.12}$$

或

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\Sigma} = g(x_1, \cdots, x_n, t) \tag{1.2.13}$$

或

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + \alpha u\right)\right|_{\Sigma} = g(x_1, \cdots, x_n, t), \tag{1.2.14}$$

这里 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 表示 u 沿边界 $\partial\Omega$ 的外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数， $\alpha > 0$ 为常数.

n 维波动方程的初值问题就是在 $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ 上定义一个函数 u, 使它在区域 $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ 内适合方程 (1.2.10), 而在 $t = 0$ 时适合初始条件 (1.2.11).

注1.2.2　考虑膜在外力作用下处于平衡状态时的形状，这时惯性力 $\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, 从而可得到膜上各点位移满足的方程

$$-a^2 \Delta u = f(x_1, x_2), \tag{1.2.15}$$

非齐次方程 (1.2.15) 称为 Poisson 方程. 如果 $f \equiv 0$, 则称其为 Laplace 方程. 习惯上将 Laplace 方程的解称为调和函数.

从物理学上讲，为了具体确定一张特定的薄膜的形状，除方程 (1.2.15) 以外，还需要考虑膜的边界所处的条件，即它还要适合边界条件 (1.2.12)　(1.2.14) 中的任意一个. 边界条件 (1.2.12) 、 (1.2.13) 、 (1.2.14) 依次称为第一类、第二类、第三类边界条件. 方程 (1.2.15) 和边界条件 (1.2.12) 、 (1.2.13) 、 (1.2.14) 中的任意一个组成的定解问题称为**边值问题**. 根据边值问题所带有边界条件的类别，依次称这些定解问题为第一、第二、第三边值问题；通常把第一、第二、第三边值问题分别称为方程 (1.2.15) 的 Dirichlet 问题、 Neumann 问题、 Robin 问题.

1.2.2　热传导方程及定解条件

当一个导热物体内各处的温度不相同时，热量就要从高温处向低温处传递，这种现象称为 “热传导”. 凡是要考虑温度变化影响的工程问题和物理问题，都需要研究有关的热传导方程.

物理模型

在三维空间中，考虑一个均匀、各向同性的物体，假定它内部有热源，并且与周围介质有热交换，求物体内部温度分布函数所满足的微分方程.

物体内部由于各部分温度不同，产生热量的传递，它们遵循能量守恒定律：物体内部热量的增加等于通过物体的边界流入的热量与由物体内部热源所产生的热量的总和，即

热　量 $t=t_2$	$-$	热　量 $t=t_1$	$=$	通过边界的流入量 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$	$+$	热源的生成量 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$

设物体所占的空间区域为 Ω, 温度分布函数为 $u=u(x,y,z,t)$.

在物体 Ω 内任意截取一块小微元体 D, 任取时段 $[t_1,t_2]$, 则由传热学中的 Fourier 热传导定律可知，在一定条件下，热流向量与温度梯度成正比

$$\boldsymbol{q}=-k\,\mathrm{grad}\,u=-k\Big(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\Big),$$

这里负号表示热量是由高温向低温流动，k 是物体的导热系数. 因而在 $\mathrm{d}t$ 时段内通过 D 的边界 ∂D 上小块曲面 $\mathrm{d}S$ 的外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 进入区域 D 的热量为 $\mathrm{d}Q$, 即

$$\mathrm{d}Q=-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t=k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S\mathrm{d}t,$$

于是从时刻 t_1 到 t_2 通过 ∂D 流进 D 中的全部热量为

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iint_{\partial D}k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S. \tag{1.2.16}$$

另一方面，在时间间隔 $[t_1,t_2]$ 内，由于温度从 $u|_{t=t_1}$ 变到 $u|_{t=t_2}$, 区域 D 所吸收的热量为

$$\iiint_D c\rho\big[u|_{t=t_2}-u|_{t=t_1}\big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{1.2.17}$$

而在 $[t_1,t_2]$ 时间间隔内，物体 D 内部热源生成的热量为

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iiint_D\rho f_0(x,y,z,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{1.2.18}$$

于是由能量守恒定律及 (1.2.16) 、 (1.2.17) 、 (1.2.18) 式可得

$$\iiint_D c\rho\big[u|_{t=t_2}-u|_{t=t_1}\big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iint_{\partial D}k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S+\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iiint_D\rho f_0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

假设 u 在柱体 $\Omega\times(0,+\infty)$ 内具有连续的二阶偏导数，由 Gauss 公式可得

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iiint_D c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ =&\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iiint_D\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(k\frac{\partial u}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(k\frac{\partial u}{\partial y}\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(k\frac{\partial u}{\partial z}\Big)+\rho f_0\Big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

又因为物体是均匀、各向同性的，所以 c、ρ、k 都是常数，假设 $f_0(x,y,z,t)$ 在 $\overline{\Omega}\times[0,+\infty)$ 内连续，由 $[t_1,t_2]$ 及 D 的任意性得

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big)=f, \tag{1.2.19}$$

其中

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f(x,y,z,t) = \frac{f_0(x,y,z,t)}{c}.$$

当 $f \geqslant 0$ 时表示有热源，当 $f \leqslant 0$ 时表示有热汇. 方程 (1.2.19) 称为热传导方程.

如果物体内部的热源以及它和外界的热交换与时间无关，这样在相当长时间以后物体内部的温度渐趋于稳定，即 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$, 从而温度场 $u(x,y,z)$ 与时间无关，由 (1.2.19) 推得它适合方程

$$-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = f(x,y,z).$$

为了具体确定物体内部的温度分布，还需要知道物体内部的初始温度分布以及通过物体的边界所受的周围介质的影响，即定解条件.

初始条件 已知在初始时刻 $t=0$ 的温度分布，即

$$u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \overline{\Omega}, \tag{1.2.20}$$

这里 $\varphi(x,y,z)$ 为已知函数.

边界条件一般分为三类.

第一类边界条件 已知边界 $\partial\Omega$ 上的温度分布，即

$$u\big|_{\Sigma} = g(x,y,z,t), \tag{1.2.21}$$

其中 $\Sigma = \partial\Omega \times [0,+\infty)$. 特别当 $g \equiv$ 常数时，表示物体的边界保持恒温.

第二类边界条件 已知通过边界 $\partial\Omega$ 的热流量，即

$$k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\bigg|_{\Sigma} = g(x,y,z,t), \tag{1.2.22}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的外法线方向. 当 $g \geqslant 0$ 时，表示流入；当 $g \leqslant 0$ 时，表示流出；特别当 $g \equiv 0$ 时，表示物体绝热.

第三类边界条件 已知通过边界 $\partial\Omega$ 与周围介质有热交换，即

$$k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\bigg|_{\Sigma} = \alpha_0(g_0 - u)\Big|_{\Sigma}$$

或

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + \alpha u\right)\bigg|_{\Sigma} = g(x,y,z,t)|_{\Sigma}, \tag{1.2.23}$$

其中 g_0 表示周围介质温度， α_0 表示热交换系数， $\alpha = \dfrac{\alpha_0}{k} > 0$. 这里 $g(x,y,z,t)$ 为已知函数.

为了具体确定物体的温度场，需要求解热传导方程的某一特定的定解问题.

设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的有界区域，在柱体 $\overline{\Omega} \times [0,+\infty)$ 上，由方程 (1.2.19) 、初始条件 (1.2.20) 和边界条件 (1.2.21) (1.2.23) 中的任意一个组成的定解问题称为热传导方程的混合问题.

例 1.2.6 对区域 Ω 内含有热源，并且上下底为绝热的薄板的温度分布，其混合问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big) + f(x,y,t), \quad (x,y) \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega}, \\ u(x,y,t) = g(x,y,t), \quad (x,y,t) \in \Sigma = \partial\Omega \times [0,+\infty). \end{cases}$$

若 $\Omega \equiv \mathbb{R}^3$, 在上半空间 $\mathbb{R}^3 \times [0,+\infty)$ 上，由方程 (1.2.19) 和初始条件 (1.2.20) 组成的定解问题称为热传导的初值问题.

例 1.2.7 对侧表面绝热的无限长细杆的温度分布，其初值问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

类似地，我们可以给出关于热传导方程半无界问题的定义.

例 1.2.8 对侧表面绝热的半无限长的无热源细杆的温度分布，其混合问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < +\infty,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x < +\infty, \\ u(0,t) = 0, \quad t \geqslant 0. \end{cases}$$

方程 (1.2.19) 虽然通常被称为热传导方程，但绝不只用来表示热传导现象. 事实上，自然界还有许多现象同样可用方程 (1.2.19) 来刻画. 例如，溶质在扩散过程中，溶液中各点的浓度函数 $u(x,y,z,t)$ 也满足方程 (1.2.19). 因此通常把方程 (1.2.19) 称为扩散方程，而 $-a^2\Delta u$ 称为扩散项.

注1.2.3 对某些三维问题，如果根据问题的某些性质，适当选取坐标系，可以化为或近似地化为一维或二维问题来处理.

例 1.2.9 如果物体可看成一根细杆，它的侧表面绝热，它与周围介质的热交换只在杆的两端 $x=0$、$x=l$ 进行. 如果在任意一个与杆的轴线垂直的截面上，初始温度和热源强度的变化很小，那么我们可以近似地认为杆上温度分布只依赖于截面的位置. 因此如果取杆的轴线为 x 轴，那么方程 (1.2.19) 可写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t),$$

通常将此方程称为一维热传导方程.

例 1.2.10 考虑一半径为 R 的球体，它通过球表面与周围介质有热交换. 如果在球面上所有各点所受周围介质的影响都相同，且球内任意一点的初始温度和热源强度只依赖于它到球心的距离而与它的方位无关，那么如果选取以球心为坐标

原点，并引进球坐标系，从而球内的温度分布函数 $u(r,t)$ 适合方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\Big)=f(r,t), \tag{1.2.24}$$

称 (1.2.24) 为球对称问题的热传导方程.

习题　1.2

1.2.1 设均匀而柔软的重弦其上端固定，下端自由，试推导弦关于铅直平衡位置的微小横振动所满足的微分方程.

1.2.2 试推导圆锥形枢轴在纵振动过程中满足的微分方程.

1.2.3 砼 (混凝土) 内部储藏着热量，称为水化热，它在浇筑后逐渐放出，放热速度和它所储藏的水化热成正比. 以 $Q(t)$ 表示它在单位体积中所储的热量，则 $\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=-\beta Q$, $Q(0)=Q_0$. 其中 β 为常数， Q_0 为已知. 假设砼的比热为 c, 密度为 ρ, 热传导系数为 k, 求它在浇筑后的温度函数 u 满足的微分方程.

1.2.4 一均匀细杆直径为 R, 假定它在同一截面上的温度相同，杆的表面绝热，试推导其温度函数 u 满足的方程.

1.2.5 有一溶质在溶液中扩散，它在溶液中各点的浓度用 $u(x,y,z,t)$ 表示，求溶质在扩散过程中浓度 u 所满足的微分方程.

1.2.6 一根长为 l 的弦，其左端固定，右端以 $\mu(t)$ 的规律运动. 试写出其边界条件.

1.2.7 一均匀细杆侧面绝热，两端点 $x=0$ 及 $x=l$ 均自由冷却，即杆端和周围介质 (两端介质温度分别为 Q_1 及 Q_2) 按 Newton 实验定律交换热量，试写出其边界条件.

1.2.8 弹性细杆的一端刚性地固定着，而另一端则受到与速度成正比的阻力的作用，试写出此杆的微小纵振动所满足的混合问题.

1.2.9 试写出以下定解问题:

(1) 矩形区域 $\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b\}$ 上膜的自由振动，设初始位移为 $\varphi(x,y)$、初始速度为 $\psi(x,y)$, 膜在边界上被固定.

(2) 球形区域 $\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$ 内含热源强度为 $f(x,y,z,t)$ 的热传导过程，设初始温度为 $\varphi(x,y,z)$, 边界上与外界有热量交换，外界温度为 $20^\circ\mathrm{C}$.

(3) 圆环形区域 $\{(x,y)\mid r^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2\}$ 内的稳态温度分布满足 Laplace 方程. 对它可以提哪些定解问题？试写出一般形式.

1.3　定解问题的适定性

前面两节建立了几个偏微分方程及相应的定解问题，这些定解问题的提法是不同的. 对于波动方程和热传导方程应该提混合问题和初值问题，而对于 Poisson

方程应该提边值问题. 这样提定解问题从物理上讲是合理的, 人们自然要问: "这样提定解问题在数学上是否也是正确的呢?" 这里提到的"提法正确"在数学上的含义应该是什么? 为此, 人们提出了一些标准, 称为定解问题的适定性. 适定的定解问题必须满足下面的三条:

(1) 解的存在性, 即所给定解问题至少有一个解;

(2) 解的唯一性, 即所给定解问题至多有一个解;

(3) 解的稳定性, 即所给定解问题的解连续依赖于定解条件.

一个连续函数, 如果具有某偏微分方程中出现的各阶连续偏导数, 且代入方程后能使它变成恒等式, 则该函数称为方程的古典解; 如果该函数无穷次可微, 则称其为光滑解; 进一步, 若该函数可以展开成收敛幂级数, 则称其为解析解. 当然, 光滑解和解析解都是古典解. 另一方面, 由于理论上的需要, 我们有时也需要研究比古典解更弱的解 (称为弱解或形式解). 本课程我们主要研究古典解.

在古典解的意义下研究解的存在性问题, 就是在相应的区域上寻找这样一个具有上述光滑性的函数, 使它满足方程和定解条件. 当然解的概念还将随着问题性质的变化和需要作必要的扩充, 故解的存在性问题依赖于按照什么意义来定义解.

因为定解数据 (如初值、边值和方程的非齐次项等) 一般都是通过实际测量得到的, 它不可能绝对正确, 所以人们自然关心对于定解数据的微小差异是否会引起解的完全失真, 这就是解的稳定性, 即解是否连续依赖于定解数据. 这里所说的"连续依赖"指的是定解条件作微小变化时, 方程的解也作微小的变化. 在稳定性概念中, 怎样才算是"微小"的, 需要进一步说明. 下面引入线性赋范空间的概念.

定义 1.3.1 设函数集合 $\mathcal{G}$ 按照函数的线性运算, 即

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \quad (f_1,\ f_2 \in \mathcal{G},\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$$

构成线性空间. 如果对 $\forall f \in \mathcal{G}$, 都有唯一一个非负的实数 $\|f\|$ 与它对应, 且满足

(1) $\|f\| \geqslant 0$, $\|f\| = 0$ 当且仅当 $f \equiv 0$;

(2) 若 $f \in \mathcal{G}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, 则 $\|\alpha f\| = |\alpha|\,\|f\|$;

(3) 若 f_1 、 $f_2 \in \mathcal{G}$, 则 $\|f_1 + f_2\| \leqslant \|f_1\| + \|f_2\|$.

此时, 称 $(\mathcal{G}, \|\cdot\|)$ 为线性赋范空间, $\|f\|$ 称为 f 的范数或模.

对于一个函数集合, 如果按照某种方式引入了"范数", 也就是规定了度量, 则 $\|f_1 - f_2\|$ 的大小表示在这个度量意义下 f_1 与 f_2 的接近程度. 为此给出常用的最大值模与平均值模的概念.

定义 1.3.2 设 $C(\Omega)$ 为定义在有界闭区域 Ω 上所有连续函数构成的集合. 对于 $g \in C(\Omega)$, 称 $\sup\limits_{P \in \Omega} |g(P)|$ 为 g 在 Ω 上的最大值模, 记为

$$\|g\|_{C(\Omega)} = \sup_{P \in \Omega} |g(P)|.$$

定义 1.3.3 设 $L_2(\Omega)$ 为定义在有界闭区域 Ω 上所有平方可积函数构成的集合. 对于 $g\in L_2(\Omega)$, 称 $\left[\int_\Omega |g(P)|^2\,\mathrm{d}P\right]^{\frac{1}{2}}$ 为 g 在 Ω 上的平均值模, 记为

$$\|g\|_{L_2(\Omega)}=\left[\int_\Omega |g(P)|^2\,\mathrm{d}P\right]^{\frac{1}{2}}.$$

有了线性赋范空间的概念, 我们可以确切地给出解的稳定性的定义.

定义 1.3.4 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界区域, $(\mathcal{U},\|\cdot\|_{\mathcal{U}})$ 与 $(\mathcal{G},\|\cdot\|_{\mathcal{G}})$ 分别是由定义在有界闭区域 $\overline{\Omega}$ 上所有函数构成的线性赋范空间. 对于混合问题

$$(\mathrm{I})\quad\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\Delta u=f(x,t), & x\in\Omega,\ t>0,\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x), & x\in\overline{\Omega},\\ u\big|_{\Sigma}=g(x,t), & (x,t)\in\Sigma=\partial\Omega\times[0,+\infty).\end{cases}$$

如果 $\varphi_i,\ \psi_i\in\mathcal{G}\ \ (i=1,2)$ 以及相应于定解问题 (I) 的解 $u_i\in\mathcal{U}\ \ (i=1,2)$ 满足: 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当

$$\|\varphi_2-\varphi_1\|_{\mathcal{G}}<\delta,\quad \|\psi_2-\psi_1\|_{\mathcal{G}}<\delta,$$

有

$$\|u_2-u_1\|_{\mathcal{U}}<\varepsilon,$$

则称定解问题 (I) 的解在范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ 意义下对初值是连续依赖的. 通常也称为解在范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ 意义下对初值是稳定的.

类似地可以定义混合问题的解对边值 g 和对方程的非齐次项 f 的连续依赖性.

解的稳定性的讨论同样也必须与一定的函数空间相联系. 确切地说, 解的稳定性问题就是研究定解问题在给定函数空间内, 当定解条件按照某种"范数"任意小时, 对应的解在给定函数空间内按照某种"范数"是否也可以任意小. 当然对于不同的函数空间"范数"是不同的, 下面以混合问题 (I) 为例, 说明在最大值模和平均值模意义下的稳定性的概念.

定义 1.3.5 在混合问题 (I) 中, 假设初值函数 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ 变为 $\varphi_1(x,y)$、$\psi_1(x)$, 边值函数 $g(x,t)$ 变为 $g_1(x,t)$, 对应的解 $u(x,t)$ 变为 $u_1(x,t)$.

(1) 如果对 $\forall\,\varepsilon>0$ 及 $\forall\,T>0$, 存在 $\delta>0$, 当

$$\|\varphi-\varphi_1\|_{C(\overline{\Omega})}<\delta,\quad \|\psi-\psi_1\|_{C(\overline{\Omega})}<\delta,\quad \|g-g_1\|_{C(\partial\Omega\times[0,T])}<\delta,$$

有

$$\|u-u_1\|_{C(\overline{\Omega}\times[0,T])}<\varepsilon,$$

则称定解问题 (I) 的解在最大值模意义下是稳定的.

(2) 如果对 $\forall\,\varepsilon > 0$ 及 $\forall\,T > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当

$$\left\|\varphi - \varphi_1\right\|_{L_2(\overline{\Omega})} < \delta,\quad \left\|\psi - \psi_1\right\|_{L_2(\overline{\Omega})} < \delta,\quad \left\|g - g_1\right\|_{L_2(\partial\Omega\times[0,T])} < \delta,$$

有

$$\left\|u - u_1\right\|_{L_2(\overline{\Omega}\times[0,T])} < \varepsilon,$$

则称定解问题 (I) 的解在平均值模意义下是稳定的.

由此可知, 对于偏微分方程的研究, 是由实际需要所提出的, 所以偏微分方程研究的重点, 应该放在实际提出的定解问题上. 对定解问题的研究, 即研究它的适定性问题, 一般分为三个步骤: 首先根据已给定的方程和定解条件求出解应有的形式, 这是分析; 其次要证明求得的形式解是方程的解, 并且满足定解条件, 这是综合, 即解的存在性; 最后还要考虑解的唯一性和稳定性.

最后必须指出: 有一些由实际问题提出的定解问题在通常意义下并不稳定, 下面给出不适定问题的例子.

例 1.3.1 弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

的第一边值问题是不适定的.

解 设 $u(x,t)$ 关于变量 x 及 t 有连续的二阶偏导数, 引进自变量变换

$$\xi = x - t,\quad \eta = x + t,$$

则由 $\dfrac{\partial\xi}{\partial x} = 1,\ \dfrac{\partial\xi}{\partial t} = -1,\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x} = 1,\ \dfrac{\partial\eta}{\partial t} = 1$ 可得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},\quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

从而由

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi} = 0.$$

下面在区域 $\{(\xi,\eta) \mid 0 < \xi < a,\ 0 < \eta < b\}$ 上求解第一边值问题

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi} = 0, & 0 < \xi < a,\ 0 < \eta < b, \\ u(\xi,0) = g_1(\xi),\quad u(\xi,b) = g_2(\xi), & 0 \leqslant \xi \leqslant a, \\ u(0,\eta) = g_3(\eta),\quad u(a,\eta) = g_4(\eta), & 0 \leqslant \eta \leqslant b, \end{cases}$$

其中 $g_i\ (i = 1,2,3,4)$ 为已知的充分光滑函数.

为保证边界条件连续，再加上相容性条件

$$g_1(0) = g_3(0),\ g_2(a) = g_4(b),\ g_1(a) = g_4(0),\ g_2(0) = g_3(b).$$

容易验证，(Ⅱ) 中的方程有如下一般形式的解

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta), \tag{1.3.1}$$

其中 F、G 为任意二阶连续可微函数.

将问题 (Ⅱ) 中的边界条件 $u(\xi, 0) = g_1(\xi)$ 和 $u(0, \eta) = g_3(\eta)$ 代入式 (1.3.1), 得

$$u(\xi, 0) = F(\xi) + G(0) = g_1(\xi),$$
$$u(0, \eta) = F(0) + G(\eta) = g_3(\eta),$$

两式相加，得

$$F(\xi) + G(\eta) + F(0) + G(0) = g_1(\xi) + g_3(\eta),$$

从而由 $u(0,0) = F(0) + G(0) = g_1(0)$ 可得

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta) = g_1(\xi) + g_3(\eta) - g_1(0). \tag{1.3.2}$$

综上可知，我们只用到了两个边界条件，便得到形式解 (1.3.2). 但是 $g_2(\xi)$ 和 $g_4(\eta)$ 是任意给定的充分光滑函数，故一般说来，解 (1.3.2) 不能再满足边界条件

$$u(\xi, b) = g_2(\xi), \quad u(a, \eta) = g_4(\eta),$$

从而所给第一边值问题的解一般是不存在的，即此定解问题是不适定的.

例 1.3.2 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

的初值问题是不适定的.

解 考虑下列两个初值问题[①]

$$(\mathrm{III})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & x \in \mathbb{R},\ y > 0, \\ u(x, 0) = 0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

和

$$(\mathrm{IV})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & x \in \mathbb{R},\ y > 0, \\ u(x, 0) = \dfrac{1}{\lambda}\sin \lambda x,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

其中 λ 为实参数.

① 1917 年 Hadamard 在瑞士召开的一次数学大会上曾经举出的例子.

容易验证，函数 $u_1(x,y)\equiv 0$ 是定解问题 (Ⅲ) 的解，函数

$$u_2(x,y)=\frac{1}{\lambda}\sin\lambda x\ \cosh\lambda y=\frac{1}{\lambda}\sin\lambda x\frac{\mathrm{e}^{\lambda y}+\mathrm{e}^{-\lambda y}}{2}$$

是定解问题 (Ⅳ) 的解.

记 $\Omega=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R},\ 0<y<+\infty\}$, 按最大值模的意义，两个定解问题对应初值之差的模

$$\sup_{(x,y)\in\partial\Omega}\left|\frac{1}{\lambda}\sin\lambda x\right|\leqslant\frac{1}{|\lambda|}\to 0\quad(\lambda\to+\infty),$$

但当取 $\lambda=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $y=1$, $x=1$ 时，令 $\lambda\to+\infty$, 有

$$\sup_{(x,y)\in\overline{\Omega}}|u_2-u_1|=\sup_{(x,y)\in\overline{\Omega}}\left|\frac{1}{\lambda}\sin\lambda x\cosh\lambda y\right|\geqslant\left|\frac{1}{\lambda}\cosh\lambda\right|\to+\infty,$$

即两个定解问题对应的解之差的绝对值可以取到很大的值，对应的模不可能任意小. 因此所给定解问题是不稳定的，从而是不适定的.

上述适定性概念是 Hadamard 首先提出来的. 由上述例子可以看出，在数学物理方程中，有些定解问题是适定的，也有些定解问题是不适定的. 考察定解问题的适定性，可以帮助我们在一定意义 (Hadamard 意义) 下判断所提定解问题是否合理，以及如何提法才合理. 但不是说所有在 Hadamard 意义下不适定的问题在客观实际中都没有意义.

例如 Laplace 方程的第二边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0, & (x,y)\in\Omega,\\[2mm] \left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y), & (x,y)\in\partial\Omega\end{cases}$$

的解在相差一个常数的意义下是唯一的 (参见第 4 章).

显然，如果函数 u 是它的解，则对任何常数 C, $u+C$ 也是它的解，因此这个定解问题的解是不唯一的，即在 Hadamard 意义下是不适定的，但是在实际中是有意义的.

不适定问题以其重要的实际意义，在数学上已成为偏微分方程的一个重要研究方向.

1.4 二阶线性偏微分方程的分类及化简

在前 3 节中，我们导出了一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),$$

弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),$$

二维 Poisson 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y),$$

从它们的来源看，它们代表三种不同类型的物理过程，但又都是两个自变量的二阶线性偏微分方程. 二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}b_j\frac{\partial u}{\partial x_j}+cu=f, \tag{1.4.1}$$

其中 a_{ij}、b_j $(i,j=1,2,\cdots,n)$、c 及 f 都是实值函数，且 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 不同时为零. 特别地，当 $n=2$ 时，可以写成

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}+cu=f,$$

其中 a_{11}，$a_{12}=a_{21}$，a_{22}，b_1，b_2，c 及 f 都是 x,y 的已知函数.

两个自变量的二阶线性偏微分方程在形式上与平面上的二次曲面相类似，但二者之间没有必然的联系. 我们希望通过自变量的适当可逆变换及未知函数的适当可逆线性变换，将方程 (1.4.1) 进行化简，并在此基础上对方程 (1.4.1) 进行分类. 由此可以看到前述的波动方程、热传导方程及 Poisson 方程恰恰对应于方程 (1.4.1) 的三种不同的类型，而且分别是它们的最典型代表.

1.4.1　两个自变量的二阶线性偏微分方程的化简

考虑两个自变量的二阶线性偏微分方程，为了方便我们引入记号

$$u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u_{xy}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\ u_{yy}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ u_x=\frac{\partial u}{\partial x},\ u_y=\frac{\partial u}{\partial y},$$

两个自变量的二阶线性偏微分方程的一般形式可写为

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f. \tag{1.4.2}$$

引入自变量变换

$$\begin{cases}\xi=\xi(x,y),\\ \eta=\eta(x,y),\end{cases} \tag{1.4.3}$$

如果函数 $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ 关于 x,y 具有连续的二阶偏导数，且 Jacobi 行列式

$$\left.\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\right|_{(x_0,y_0)}=\begin{vmatrix}\xi_x(x_0,y_0) & \xi_y(x_0,y_0)\\ \eta_x(x_0,y_0) & \eta_y(x_0,y_0)\end{vmatrix}\neq 0 \tag{1.4.4}$$

则由隐函数存在定理可知，变换 (1.4.3) 至少在点 (x_0,y_0) 的某个邻域中是可逆的.

下面利用变换 (1.4.3) 将方程 (1.4.2) (至少在 (x_0,y_0) 的一个邻域内) 进行化简.

由复合函数的求导法则，得

$$\begin{cases} u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\ u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}, \\ u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy}, \\ u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}. \end{cases}$$

把上式代入 (1.4.2) 可得到以 (ξ,η) 为自变量的方程

$$\widetilde{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\widetilde{a}_{12}u_{\xi\eta} + \widetilde{a}_{22}u_{\eta\eta} + \widetilde{b}_1 u_\xi + \widetilde{b}_2 u_\eta + \widetilde{c}u = \widetilde{f}, \tag{1.4.5}$$

其中

$$\begin{cases} \widetilde{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2, \\ \widetilde{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y, \\ \widetilde{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2, \\ \widetilde{b}_1 = a_{11}\xi_{xx} + 2a_{12}\xi_{xy} + a_{22}\xi_{yy} + b_1\xi_x + b_2\xi_y, \\ \widetilde{b}_2 = a_{11}\eta_{xx} + 2a_{12}\eta_{xy} + a_{22}\eta_{yy} + b_1\eta_x + b_2\eta_y, \\ \widetilde{c}(\xi,\eta) = c[x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)], \\ \widetilde{f}(\xi,\eta) = f[x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)], \end{cases} \tag{1.4.6}$$

或由下式 (矩阵形式) 确定

$$\begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{b}_1 \\ \widetilde{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{xx} & \xi_{xy} \\ \eta_{xx} & \eta_{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_{xy} & \xi_{yy} \\ \eta_{xy} & \eta_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

注意到 (1.4.6) 中的第一式和第三式的形式完全相同，仅仅是将第一式中的 ξ 换成了 η. 由此可知，如果能求得方程

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0 \tag{1.4.7}$$

的两个函数无关的解 $\varphi = \varphi_1(x,y)$ 及 $\varphi = \varphi_2(x,y)$, 并令

$$\begin{cases} \xi = \varphi_1(x,y), \\ \eta = \varphi_2(x,y), \end{cases}$$

则方程 (1.4.5) 的系数 $\widetilde{a}_{11}$ 及 $\widetilde{a}_{22}$ 均化为零，二阶导数项仅包含一项 $2\widetilde{a}_{12}\widetilde{u}_{\xi\eta}$, 从而使方程 (1.4.5) 的形式得到化简.

下面来具体讨论这种做法的可行性.

引理 1.4.1 设 $\varphi=\varphi(x,y)$ 定义在区域 Ω 上，且 $\varphi_x^2+\varphi_y^2\neq 0$, 则 $\varphi(x,y)$ 是方程 (1.4.7) 的特解的充分必要条件为 $\varphi(x,y)=C$ 是常微分方程

$$a_{11}\mathrm{d}y^2-2a_{12}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+a_{22}\mathrm{d}x^2=0 \tag{1.4.8}$$

的一个初积分，其中 C 为任意常数.

证明 由条件 $\varphi_x^2+\varphi_y^2\neq 0$, 不妨设 $\varphi_y\neq 0$, 则对 $\forall\, C\in\mathbb{R}$, 由隐函数存在定理可知，存在由方程 $\varphi(x,y)=C$ 所确定的函数 $y=y(x,C)$, 使得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\Big(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\Big)\Big|_{y=y(x,C)}.$$

必要性. 设 $\varphi=\varphi(x,y)$ 是方程 (1.4.7) 的解，则对 $\forall\,(x,y)\in\Omega$ 及 $\forall\, C\in\mathbb{R}$, 有

$$a_{11}\Big(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\Big)^2-2a_{12}\Big(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\Big)+a_{22}=0.$$

并存在由方程 $\varphi(x,y)=C$ 所确定的函数 $y=y(x)$, 使得

$$a_{11}\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)^2-2a_{12}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_{22}=\Big[a_{11}\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\Big)^2+2a_{12}\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\Big)+a_{22}\Big]\Big|_{y=y(x,C)}=0.$$

从而 $y=y(x,C)$ 满足方程 (1.4.8), 即 $\varphi(x,y)=C$ 为方程 (1.4.8) 的一个初积分.

充分性. 设 $\varphi(x,y)=C$ 是方程 (1.4.8) 的初积分，则对 $\forall\,(x_0,y_0)\in\Omega$. 存在由方程 $\varphi(x,y)=\varphi(x_0,y_0)=C_0$ 所确定的隐函数 $y=y(x,C_0)$, 使得

$$y_0=y(x_0,C_0),$$

从而沿着曲线 $\varphi(x,y)=C_0$ 有

$$a_{11}\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)^2-2a_{12}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_{22}=\Big[a_{11}\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\Big)^2+2a_{12}\Big(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\Big)+a_{22}\Big]\Big|_{y=y(x,C_0)}=0.$$

并由 $y_0=y(x_0,C_0)$ 可得

$$\Big[a_{11}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)^2+2a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}+a_{22}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)^2\Big]\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)}=0.$$

由于 $(x_0,y_0)\in\Omega$ 是任取的，于是

$$a_{11}(\varphi_x)^2+2a_{12}\varphi_x\varphi_y+a_{22}(\varphi_y)^2=0,\quad (x,y)\in\Omega.$$

即 $\varphi=\varphi(x,y)$ 是方程 (1.4.7) 的一个特解. ∎

由引理 1.4.1 可知，求方程 (1.4.7) 的两个函数无关的解的问题，转化为求方程 (1.4.8) 的两个函数无关的初积分的问题. 方程 (1.4.8) 称为方程 (1.4.2) 的**特征方程**, 并称其积分曲线为方程 (1.4.2) 的**特征线**.

可以看出，求方程 (1.4.8) 的初积分与求如下的两个常微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \end{cases} \tag{1.4.9}$$

的解是等价的．记

$$\varDelta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}, \quad \widetilde{\varDelta} = \widetilde{a}_{12}^2 - \widetilde{a}_{11}\widetilde{a}_{22}, \quad J = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x, \tag{1.4.10}$$

由 (1.4.6) 的矩阵形式可得

$$\widetilde{\varDelta} = \varDelta J^2. \tag{1.4.11}$$

以下分几种情形分别讨论：

(1) 在点 (x_0, y_0) 的一个邻域内 $\varDelta > 0$. 由常微分方程解的存在定理可知，方程 (1.4.9) 相应地存在着两族不同的实特征曲线 $\varphi_1(x,y) = C_1$, $\varphi_2(x,y) = C_2$, 且可假设 $\varphi_{1x}^2 + \varphi_{1y}^2 \neq 0$ 及 $\varphi_{2x}^2 + \varphi_{2y}^2 \neq 0$. 由于

$$\begin{cases} -\dfrac{\varphi_{1x}}{\varphi_{1y}} = \dfrac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} = \dfrac{a_{12} + \sqrt{\varDelta}}{a_{11}}, \\ -\dfrac{\varphi_{2x}}{\varphi_{2y}} = \dfrac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} = \dfrac{a_{12} - \sqrt{\varDelta}}{a_{11}}, \end{cases}$$

且 $\varDelta > 0$, 可推知 $\dfrac{\varphi_{1x}}{\varphi_{1y}} \neq \dfrac{\varphi_{2x}}{\varphi_{2y}}$, 于是，变换

$$\begin{cases} \xi = \varphi_1(x,y), \\ \eta = \varphi_2(x,y) \end{cases}$$

的 Jacobi 行列式

$$J = \frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x = \varphi_{1x}\varphi_{2y} - \varphi_{2x}\varphi_{1y} \neq 0,$$

从而由式 (1.4.6) 及引理 1.4.1 可知，

$$\widetilde{a}_{11} \equiv \widetilde{a}_{22} \equiv 0.$$

由式 (1.4.11) 可知，$\widetilde{a}_{12}^2 = \varDelta J^2 \neq 0$, 于是方程 (1.4.2) 在点 (x_0, y_0) 的邻域内可化为

$$u_{\xi\eta} = Au_\xi + Bu_\eta + Cu + D, \tag{1.4.12}$$

其中 A、B、C、D 均为 (ξ,η) 的已知函数.

如果在 (1.4.12) 中再作自变量的可逆线性变换

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{1}{2}(s+t), \\ \eta = \dfrac{1}{2}(s-t), \end{cases}$$

方程 (1.4.12) 可化为

$$u_{ss} - u_{tt} = A_1 u_s + B_1 u_t + C_1 u + D_1, \tag{1.4.13}$$

其中 A_1、B_1、C_1、D_1 均为 (s,t) 的已知函数.

特别当 $A_1 \equiv B_1 \equiv C_1 \equiv D_1 \equiv 0$ 时，即得到弦振动方程.

(2) 在点 (x_0, y_0) 的一个邻域内 $\Delta \equiv 0$. 此时方程 (1.4.8) 化为一阶实方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_{12}}{a_{11}},$$

于是该方程只有一族实特征曲线，记为 $\varphi_1(x,y) = C$, 且可假设 $\varphi_{1x}^2 + \varphi_{1y}^2 \neq 0$.

取 $\xi = \varphi_1(x,y)$, 再任取 $\eta = \varphi_2(x,y)$, 使其满足 $\varphi_{2x}^2 + \varphi_{2y}^2 \neq 0$ 及

$$J = \frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} \neq 0.$$

作变换

$$\begin{cases} \xi = \varphi_1(x,y), \\ \eta = \varphi_2(x,y), \end{cases}$$

则由式 (1.4.6) 及引理 1.4.1 可得 $\widetilde{a}_{11} \equiv 0$, 故由 (1.4.11) 可得 $\widetilde{a}_{12}^2 = \Delta J^2 \equiv 0$.

另一方面, 由 $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \equiv 0$ 可知，$a_{11}a_{22} > 0$, 故不妨设 $a_{11} > 0$、$a_{22} > 0$. 则有 $a_{12} = \pm\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$, 故由 $J = \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y \neq 0$ 可得

$$\frac{\eta_x}{\eta_y} \neq \frac{\xi_x}{\xi_y} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} = \mp\frac{\sqrt{a_{22}}}{\sqrt{a_{11}}}.$$

从而由式 (1.4.6) 及上式可得

$$\widetilde{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 = (\sqrt{a_{11}}\eta_x \pm \sqrt{a_{22}}\eta_y)^2 \not\equiv 0.$$

综上可知，方程 (1.4.2) 在点 (x_0, y_0) 的邻域内可化为

$$u_{\eta\eta} = A_2 u_\xi + B_2 u_\eta + C_2 u + D_2, \tag{1.4.14}$$

其中 A_2、B_2、C_2、D_2 均为 (ξ,η) 的已知函数.

在方程 (1.4.14) 中，再作未知函数的可逆线性变换

$$v = u \exp\left\{ -\frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta} B_2(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\tau \right\}^{①},$$

就得到关于 v 的方程

$$v_{\eta\eta} = A_3 v_\xi + C_3 v + D_3, \tag{1.4.15}$$

其中不再出现对 η 的一阶偏导数项.

特别当 $A_3 \equiv 1$, $C_3 \equiv D_3 \equiv 0$ 时，就得到热传导方程.

①符号 $\exp x$ 表示指数函数 e^x.

(3) 在点 (x_0, y_0) 的一个邻域内 $\Delta < 0$. 此时方程 (1.4.8) 不存在实特征曲线, 它的初积分如果存在, 只能是复函数. 假设

$$\varphi(x,y) = \varphi_1(x,y) + \mathrm{i}\,\varphi_2(x,y) = C$$

是方程 (1.4.8) 的一个初积分[①], 而 $\varphi_1(x,y)$、$\varphi_2(x,y)$ 均为实函数, 于是 $\varphi = \varphi(x,y)$ 满足方程 (1.4.7).

为了限于在实数范围内考虑问题, 作如下的自变量变换

$$\begin{cases} \xi = \mathrm{Re}\,\varphi(x,y) = \varphi_1(x,y), \\ \eta = \mathrm{Im}\,\varphi(x,y) = \varphi_2(x,y), \end{cases} \tag{1.4.16}$$

由 $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0$ 及方程 (1.4.9) 可得

$$a_{11}\varphi_x = -\left(a_{12} + \mathrm{i}\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\right)\varphi_y,$$

分离实部和虚部得到

$$\begin{cases} a_{11}\xi_x = -a_{12}\xi_y + \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\,\eta_y, \\ a_{11}\eta_x = -a_{12}\eta_y - \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\,\xi_y, \end{cases} \tag{1.4.17}$$

由 $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ 可得 $a_{11} \neq 0$, 从而变换 (1.4.16) 的 Jacobi 行列式为

$$J = \frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \xi_x\eta_y - \eta_x\xi_y = \frac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{a_{11}}(\xi_y^2 + \eta_y^2).$$

如果 $J = 0$, 则 $\xi_y = \eta_y = 0$, 故由 (1.4.17) 可得 $\xi_x = \eta_x = 0$, 从而 $\varphi_x = \varphi_y = 0$. 这与 $\varphi(x,y) = C$ 是初积分矛盾, 此矛盾说明 $J \neq 0$, 即变换 (1.4.16) 在点 (x_0, y_0) 的一个邻域内是可逆变换.

由于 $\varphi = \xi + \mathrm{i}\eta$ 满足方程 (1.4.7), 代入后再将实部与虚部分开, 可得

$$\begin{cases} a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2, \\ a_{11}\xi_x\eta_x + 2a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = 0, \end{cases} \tag{1.4.18}$$

故由 (1.4.6) 及 (1.4.11) 可知, $\widetilde{a}_{12} = 0$, $-\widetilde{a}_{11}\widetilde{a}_{22} = \Delta J^2 < 0$, 从而由

$$\widetilde{a}_{11} = \widetilde{a}_{22} \neq 0$$

可知, 方程 (1.4.2) 在点 (x_0, y_0) 的一个邻域内可化为

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = A_4 u_\xi + B_4 u_\eta + C_4 u + D_4, \tag{1.4.19}$$

其中 A_4、B_4、C_4、D_4 是 (ξ, η) 的已知函数.

特别当 $A_4 \equiv B_4 \equiv C_4 \equiv D_4 \equiv 0$ 时, 就得到 Poisson 方程.

① 在系数 a_{11}、a_{12} 及 a_{22} 是 $\varphi(x,y)$ 的解析函数时, 利用常微分方程的解析理论可知, 这样的初积分总是存在的. 在系数非解析时, 可以直接从式 (1.4.18) 求出 $\xi = \varphi_1(x,y)$ 及 $\eta = \varphi_2(x,y)$.

1.4.2　两个自变量的二阶线性方程的分类

从上面的讨论知道，由式 (1.4.10) 引入的、由方程 (1.4.2) 的二阶导数项系数所组成的判别式 Δ 的符号，在方程化简中起着重要的作用，而可逆变换 (1.4.3) 保证了化简后方程的二阶导数项所组成的判别式 $\tilde{\Delta}$ 与 Δ 同号，据此可以将方程 (1.4.2) 进行分类.

定义 1.4.1 如果方程 (1.4.2) 的二阶导数项的系数 a_{11}、a_{12} 及 a_{22} 在区域 Ω 中的一点 (x_0, y_0) 满足

$$\Delta \equiv a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0,$$

则称方程 (1.4.2) 在点 (x_0, y_0) 为**双曲型的**; 如果在点 (x_0, y_0) 满足

$$\Delta \equiv a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0,$$

则称方程 (1.4.2) 在点 (x_0, y_0) 为**抛物型的**; 如果在点 (x_0, y_0) 满足

$$\Delta \equiv a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0,$$

则称方程 (1.4.2) 在点 (x_0, y_0) 为**椭圆型的**.

由上述讨论可知，在区域 Ω 中的任一点，方程 (1.4.2) 必属于而且只属于上述三种类型之一，且其类型完全由方程 (1.4.2) 的二阶导数项系数决定，与其他项系数无关.

定义 1.4.2 如果方程 (1.4.2) 在区域 Ω 中的每一点处均为双曲型的或抛物型的或椭圆型的，则称方程 (1.4.2) 在区域 Ω 中为双曲型的或抛物型的或椭圆型的，简称为双曲型方程或抛物型方程或椭圆型方程.

一维波动方程、一维热传导方程和二维 Poisson 方程分别是这三类方程最重要的代表，因此又称波动方程为双曲型方程，称热传导方程为抛物型方程，称 Poisson 方程为椭圆型方程. 还需指出的是，我们前面讨论的三种情况虽然是相互排斥的，但并不包括方程 (1.4.2) 的所有情形.

如果方程 (1.4.2) 在区域 Ω 中的部分区域上是双曲型的，而在另一部分区域上是椭圆型的，在这两个区域的分界线上是抛物型的，则方程 (1.4.2) 称为混合型的. 例如， Tricomi 方程

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

在上半平面 $y > 0$ 内为椭圆型，在下半平面 $y < 0$ 内为双曲型，当所考察的区域 Ω 包含轴 $y = 0$ 上的某些线段时，该方程在 Ω 内为混合型的.

如果方程 (1.4.2) 在区域 Ω 中的部分区域上为双曲型，在其余部分为抛物型，而在区域 Ω 中没有椭圆型的点，则方程 (1.4.2) 称为退缩双曲型方程. 例如，方程

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

在 $y\neq 0$ 时为双曲型，在 $y=0$ 时为抛物型，因此它在任何包含 $y=0$ 的区域中均为退缩双曲型方程.

如果方程 (1.4.2) 在区域 Ω 中的部分区域上为椭圆型，在其余部分为抛物型，而在区域 Ω 中没有双曲型的点，则方程 (1.4.2) 称为退缩椭圆型方程. 例如，方程

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

在任何包含 $y=0$ 的区域中均为退缩椭圆型方程.

对于在一个区域 Ω 中为双曲型、抛物型或椭圆型的方程，可以用上一段方法将方程进行化简，分别得到相应的方程 (1.4.12) 或 (1.4.13) 、(1.4.14) 或 (1.4.15) 以及 (1.4.19)，称它们为这些方程的标准型.

上述化标准型的方法，一般说来只能在区域 Ω 中某一点 (x_0,y_0) 的邻域中有效，但在一些特殊情况，所作的变换在整个区域 Ω 中都是可逆的，因此可以将方程在整个区域 Ω 中化为标准型.

在具体将方程化为标准型时，只能在具有确定类型的区域中用上述方法化标准型. 例如， Tricomi 方程，只能分别在其双曲型区域及椭圆型区域中化标准型，而不能在整个混合型区域化标准型，也不能在变型线 $y=0$ (它不是区域) 上化为抛物型方程的标准型.

例 1.4.1 判定方程

$$y^2u_{xx}+2xyu_{xy}+x^2u_{yy}=0\quad(x^2+y^2\neq 0)$$

的类型，并化标准型.

解 因为 $a_{11}=y^2$, $a_{12}=xy$, $a_{22}=x^2$, 而判别式

$$\varDelta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=x^2y^2-x^2y^2=0,$$

故方程为抛物型的.

原方程的特征方程为

$$y^2\mathrm{d}y^2-2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}x^2=0,$$

整理可写为

$$(y\mathrm{d}y-x\mathrm{d}x)^2=0,$$

其初积分为

$$\varphi_1(x,y)=x^2-y^2=C.$$

作自变量变换

$$\begin{cases} \xi = x^2 - y^2, \\ \eta = xy, \end{cases}$$

其中 $\eta = xy$ 是适当选取的，只要简便，且满足

$$J = \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = 2x\eta_y + 2y\eta_x \neq 0$$

即可. 显然当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时， $J = 2x^2 + 2y^2 \neq 0$.

由复合函数的求导法则，可得

$$\begin{cases} u_x = 2xu_\xi + yu_\eta, \\ u_y = -2yu_\xi + xu_\eta, \\ u_{xx} = 4x^2u_{\xi\xi} + 4xyu_{\xi\eta} + y^2u_{\eta\eta} + 2u_\xi, \\ u_{xy} = -4xyu_{\xi\xi} + 2(x^2 - y^2)u_{\xi\eta} + xyu_{\eta\eta} + u_\eta, \\ u_{yy} = 4y^2u_{\xi\xi} - 4xyu_{\xi\eta} + x^2u_{\eta\eta} - 2u_\xi, \end{cases}$$

于是原方程化为

$$(x^2 + y^2)^2u_{\eta\eta} + 2(y^2 - x^2)u_\xi + 2xyu_\eta = 0.$$

即

$$(\xi^2 + 4\eta^2)u_{\eta\eta} - 2\xi u_\xi + 2\eta u_\eta = 0$$

或

$$u_{\eta\eta} = \frac{2\xi}{\xi^2 + 4\eta^2}u_\xi - \frac{2\eta}{\xi^2 + 4\eta^2}u_\eta.$$

例 1.4.2 判断 Tricomi 方程

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

的类型，并化标准型.

解 由 Tricomi 方程的特征方程

$$y\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}x^2 = 0$$

可知，判别式 $\Delta = -y$ 在全平面上不保号，所以它是混合型方程，只能分别在双曲型区域及椭圆型区域中将方程化为标准型.

在双曲型区域 $y < 0$ 中，特征方程可写为

$$\mathrm{d}x \pm \sqrt{-y}\mathrm{d}y = 0,$$

求得其初积分为

$$x \mp \frac{2}{3}\sqrt{-y^3} = C.$$

作变换

$$\begin{cases} \xi = x - \dfrac{2}{3}\sqrt{-y^3}, \\ \eta = x + \dfrac{2}{3}\sqrt{-y^3}, \end{cases} \tag{1.4.20}$$

其 Jacobi 行列式

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{-y} \\ 1 & -\sqrt{-y} \end{vmatrix} = -2\sqrt{-y} \neq 0,$$

于是

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-y} \\ 1 & -\sqrt{-y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{-y} & -\sqrt{-y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{b}_1 \\ \widetilde{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{2\sqrt{-y}} \\ 0 & \dfrac{1}{2\sqrt{-y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2\sqrt{-y}} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-y}} \end{pmatrix}.$$

因此原方程化为

$$4yu_{\xi\eta} - \frac{1}{2\sqrt{-y}}u_\xi + \frac{1}{2\sqrt{-y}}u_\eta = 0.$$

由式 (1.4.20) 整理可得

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)}(u_\xi - u_\eta) = 0.$$

此方程称为 Euler- Poisson 方程，变换 (1.4.20) 在整个双曲型区域 $y < 0$ 中是可逆的，并将区域 $y < 0$ 化为 $\xi O\eta$ 平面上的区域 $\eta - \xi > 0$; 而原方程的变型线 $y = 0$ 化为 Euler- Poisson 方程的奇线 $\eta - \xi = 0$.

在椭圆型区域 $y > 0$ 中，可将特征方程写成

$$\mathrm{d}x \pm \mathrm{i}\sqrt{y}\mathrm{d}y = 0,$$

其初积分为

$$x \pm \mathrm{i}\frac{2}{3}\sqrt{y^3} = C.$$

作变换

$$\begin{cases} \xi = x, \\ \eta = \dfrac{2}{3}\sqrt{y^3}. \end{cases} \tag{1.4.21}$$

其 Jacobi 行列式

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{y} \end{vmatrix} = \sqrt{y} \neq 0,$$

于是

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{b}_1 \\ \widetilde{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \end{pmatrix}.$$

因此原方程化为

$$yu_{\xi\xi} + yu_{\eta\eta} + \frac{1}{2\sqrt{y}}u_\eta = 0.$$

由 (1.4.21) 式整理可得

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}u_\eta = 0. \tag{1.4.22}$$

同样可以看到，变换 (1.4.21) 在整个椭圆型区域 $y > 0$ 中是可逆的，并将区域 $y > 0$ 化为 $\xi O\eta$ 平面上的区域 $\eta > 0$; 而原方程的变型线 $y = 0$ 同样化为方程 (1.4.22) 的奇线 $\eta = 0$.

1.4.3 多个自变量的二阶线性方程的分类

在方程 (1.4.1) 中，假设 $u_{x_ix_j} = u_{x_jx_i}$, $a_{ij} = a_{ji}$, 并引入记号

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \nabla_x = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

则方程 (1.4.1) 可写为

$$(\nabla_x^T A \nabla_x)u + (\nabla_x^T B)u + cu = f, \tag{1.4.23}$$

其中 ∇_x^T 为 ∇_x 的转置, $A = A^T$, $A \neq 0$, a_{ij}、b_j、c、f 是空间 $\mathbb{R}^n$ 的某区域 Ω 中的连续函数.

对 $\forall\, x_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \in \Omega$, 用 $A(x_0)$ 及 $B(x_0)$ 表示矩阵 A 及矩阵 B 在点 x_0 的值，则由 $A(x_0)$ 是实对称矩阵可知，存在一个正交矩阵 $Q(x_0)$, 使得

$$Q^{-1}(x_0)A(x_0)Q(x_0) = \operatorname{diag}(\lambda_1(x_0), \lambda_2(x_0), \cdots, \lambda_n(x_0)).$$

此时 $\lambda_1(x_0), \lambda_2(x_0), \cdots, \lambda_n(x_0)$ 为 $A(x_0)$ 的实特征值，从而由 $|Q(x_0)| = \pm 1$ 可得

$$\big|A(x_0)\big| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(x_0) = \lambda_1(x_0)\lambda_2(x_0)\cdots\lambda_n(x_0).$$

类似于前面关于两个自变量的情形，我们有

定义 1.4.3 对 $\forall\, x_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \in \Omega$, 假设 $\lambda_1(x_0)$, $\lambda_2(x_0)$, $\cdots$, $\lambda_n(x_0)$ 为方程 (1.4.1) 系数矩阵 $A(x_0)$ 的 n 个特征值.

(1) 如果 $\lambda_1(x_0)$, $\lambda_2(x_0)$, $\cdots$, $\lambda_n(x_0)$ 都不为零且符号相同，则称方程 (1.4.1) 在点 x_0 是椭圆型的；

(2) 如果 $\lambda_1(x_0)$. $\lambda_2(x_0)$, $\cdots$, $\lambda_n(x_0)$ 只有一个为零，其余 $n-1$ 个有相同的符号. 假设 $\lambda_i(x_0) = 0$, 且变换后对应的导数项的自变量为 ξ_i, 而含 $\dfrac{\partial u}{\partial \xi_i}$ 的项的系数不为零，则称方程 (1.4.1) 在点 x_0 是抛物型的；

(3) 如果 $\lambda_1(x_0)$, $\lambda_2(x_0)$, $\cdots$, $\lambda_n(x_0)$ 都不为零，其中 $n-1$ 个符号相同，另一个有相反的符号，则称方程 (1.4.1) 在点 x_0 是双曲型的.

当然在多个自变量 $(n > 2)$ 的情形下，还可能出现一些在两个自变量情形下所不可能出现的复杂情况，下面只给出常用的两种类型.

如果 $\lambda_1(x_0)$, $\lambda_2(x_0)$, $\cdots$, $\lambda_n(x_0)$ 都不为零，其中 m $(1 < m < n-1)$ 个符号相同，其余 $n-m$ 个有相反的符号，则称方程 (1.4.1) 在点 x_0 是超双曲型的.

例如，方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2}$$

就是超双曲型的.

如果 $\lambda_1(x_0)$, $\lambda_2(x_0)$, $\cdots$, $\lambda_n(x_0)$ 中至少有一个为零，则称方程 (1.4.1) 在点 x_0 是广义抛物型的.

例如，方程

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \sum_{i=2}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad (1 < m \leqslant n-1)$$

就是广义抛物型的.

如果对于区域 Ω 上的每一点，方程 (1.4.1) 都是椭圆型的或 (广义) 抛物型的或 (超) 双曲型的，则称方程 (1.4.1) 在区域 Ω 内是椭圆型的或 (广义) 抛物型的或 (超) 双曲型的. 如果在区域 Ω 内不同的部分区域内，方程 (1.4.1) 属于不同的类型，则称方程 (1.4.1) 在区域 Ω 内是混合型的.

在二阶线性偏微分方程中，应用较多也比较重要的还是双曲、椭圆或抛物型的方程，也是本书将集中主要篇幅讨论的三类方程.

下面讨论方程 (1.4.1) 的化简问题.

在区域 Ω 内某点 x_0 处, 方程 (1.4.1) 的系数矩阵 $A(x_0)$ 是实对称矩阵, 所以存在一个可逆的矩阵

$$D(x_0)=\begin{pmatrix} d_{11}(x_0) & d_{12}(x_0) & \cdots & d_{1n}(x_0) \\ d_{21}(x_0) & d_{22}(x_0) & \cdots & d_{2n}(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n1}(x_0) & d_{n2}(x_0) & \cdots & d_{nn}(x_0) \end{pmatrix}.$$

使得

$$D^T(x_0)A(x_0)D(x_0)=E(x_0) \tag{1.4.24}$$

为规范型, 其中矩阵 $E(x_0)=\left(e_{ij}\right)_{n\times n}$ 的元素满足

$$\begin{cases} e_{ij}=0, \quad (i\neq j), \\ e_{ii}=1, \text{或} \ -1, \text{或}\ 0, \quad (i=1,2\cdots,n). \end{cases}$$

作自变量的线性变换

$$\xi^T=\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_{11}(x_0) & d_{12}(x_0) & \cdots & d_{1n}(x_0) \\ d_{21}(x_0) & d_{22}(x_0) & \cdots & d_{2n}(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n1}(x_0) & d_{n2}(x_0) & \cdots & d_{nn}(x_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{1.4.25}$$

则由复合函数求导公式得

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial \xi_j}\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{n}d_{ij}(x_0)\frac{\partial u}{\partial \xi_j},$$

于是

$$\nabla_x=D(x_0)\nabla_\xi.$$

把上式代入 (1.4.23), 由式 (1.4.24) 可得

$$[\nabla_\xi^T E(x_0)\nabla_\xi]u+[\nabla_\xi^T D^T(x_0)B(x_0)]u+C(x_0)u=f(x_0).$$

由式 (1.4.25), 记 $\xi_0=x_0D(x_0)$, 整理可得

$$[\nabla_\xi \widetilde{E}(\xi_0)\nabla_\xi]u+[\nabla_\xi^T \widetilde{B}(\xi_0)]u+\widetilde{C}(\xi_0)u=\widetilde{f}(\xi_0).$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}e_{ii}u_{\xi_i\xi_i}+\sum_{j=1}^{n}\widetilde{B}_j(\xi_0)u_{\xi_j}+\widetilde{C}(\xi_0)u=\widetilde{f}(\xi_0), \tag{1.4.26}$$

其中 $\widetilde{E}(\xi_0)$、$\widetilde{B}(\xi_0)$、$\widetilde{C}(\xi_0)$、$\widetilde{f}(\xi_0)$ 分别表示 $E(x_0)$、$D^T(x_0)B(x_0)$、$C(x_0)$、$f(x_0)$ 在点 x_0 的对应点 ξ_0 处的值.

如果方程 (1.4.1) 的系数矩阵 A 是常数矩阵，则通过自变量的可逆线性变换 (1.4.25) 后，所得到的新方程的二阶项的系数一定仍是常数，这时能在整个区域 Ω 内把方程 (1.4.1) 化为形如 (1.4.26) 的方程，称形如 (1.4.26) 的方程为标准型.

定理 1.4.1 如果方程 (1.4.1) 的系数矩阵 A 是常数矩阵，且它属于椭圆型或双曲型或广义抛物型方程，则存在一个可逆的自变量变换，把方程 (1.4.1) 化为形如

$$\sum_{i=1}^{n} u_{\xi_i\xi_i} + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{B}_j u_{\xi_j} + \widetilde{C}u = \widetilde{f} \tag{1.4.27}$$

或

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_{\xi_i\xi_i} - u_{\xi_n\xi_n} + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{B}_j u_{\xi_j} + \widetilde{C}u = \widetilde{f} \tag{1.4.28}$$

或

$$\sum_{i=1}^{m} u_{\xi_i\xi_i} + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{B}_j u_{\xi_j} + \widetilde{C}u = \widetilde{f} \tag{1.4.29}$$

的标准型，其中 $1 \leqslant m < n$.

如果方程 (1.4.1) 的系数矩阵 A 不是常数矩阵，则根据代数学中关于二次型的惯性定理，对于化实对称矩阵 $A(x_0)$ 为规范型 $E(x_0)$ 的任何可逆矩阵 $D(x_0)$，规范型 $E(x_0)$ 的元素等于 1 、− 1 或 0 的个数与 $A(x_0)$ 的特征值为正数、负数或零的个数分别是相同的，于是可得如下结论：

(1) 如果方程 (1.4.1) 在点 x_0 处是双曲型的，则可在点 x_0 处化为

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_{\xi_i\xi_i} - u_{\xi_n\xi_n} + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{B}_j u_{\xi_j} + \widetilde{C}u = \widetilde{f};$$

(2) 如果方程 (1.4.1) 在点 x_0 处是超双曲型的，则可在点 x_0 处化为

$$\sum_{i=1}^{m} u_{\xi_i\xi_i} - \sum_{i=m+1}^{n} u_{\xi_i\xi_i} + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{B}_j u_{\xi_j} + \widetilde{C}u = \widetilde{f},$$

其中 $1 < m < n-1$;

(3) 如果方程 (1.4.1) 在点 x_0 处是椭圆型的，则可在点 x_0 处化为

$$\sum_{i=1}^{n} u_{\xi_i\xi_i} + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{B}_j u_{\xi_j} + \widetilde{C}u = \widetilde{f};$$

(4) 如果方程 (1.4.1) 在点 x_0 处是抛物型的，则可在点 x_0 处化为

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_{\xi_i\xi_i} + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{B}_j u_{\xi_j} + \widetilde{C}u = \widetilde{f},$$

其中 $\widetilde{B}_n \neq 0$;

(5) 如果方程 (1.4.1) 在点 x_0 处是广义抛物型的，则可在点 x_0 处化为

$$\sum_{i=1}^{m} u_{\xi_i\xi_i} + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{B}_j u_{\xi_j} + \widetilde{C}u = \widetilde{f},$$

其中 $1 \leqslant m < n$.

一般情况下，对于方程 (1.4.1) 已不能在一个区域 Ω 中化为标准型，但当它的系数矩阵 A 是常数矩阵时，可用同一个可逆的实线性变换，把它在整个区域 Ω 中化为标准型；当它的系数矩阵 A 不是常数矩阵时，一般也不能用同一个线性变换把它在整个区域 Ω，甚至在某一点的一个邻域内化为标准型.

习题　1.4

1.4.1　判定下列方程的类型：

(1) $u_{xx} - 2xu_{xy} = 0$;　　(2) $u_{xx} + (x+y)^2 u_{yy} = 0$;

(3) $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$;　　(4) $e^x u_{xx} + e^{-y} u_{yy} - u_{zz} - 2u_{tt} = 0$;

(5) $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0$;

(6) $(1+x^2)u_{xx} + (1+y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y - 2u = 0$;

(7) $(1-x^2)u_{xx} - 2xyu_{xy} + (1-y^2)u_{yy} = 0$;

(8) $k^2 u_{xx} + (1+k^2)u_{yy} - k^2 u_t = 0$　(k为常数).

1.4.2　证明两个自变量的二阶线性方程经过自变量的可逆变换及未知函数的可逆线性变换后，其类型不会改变.

1.4.3　将下列方程化为标准型：

(1) $u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + 4u_y + u = 0$;　　(2) $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 0$;

(3) $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$;　　(4) $e^{2x} u_{xx} + 2e^{x+y} u_{xy} + e^{2y} u_{yy} - xu = 0$;

(5) $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = e^y$;　　(6) $3u_{xx} + 4u_{yy} + 5u_{zz} + u_y = 0$;

(7) $u_{xx} - (1+y^2)^2 u_{yy} - 2y(1+y^2)u_y = 0$;

(8) $u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - (1+\sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0$;

(9) $(1+x^2)u_{xx} + (1+y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$.

1.4.4　确定下列方程的通解：

(1) $u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0$;　　(2) $u_{xx} - u_{xy} = 0$.

1.4.5　证明两个自变量的二阶常系数椭圆型及双曲型方程一定可以通过自变量的可逆变换及下述形式的未知函数变换 $u = e^{\lambda\xi+\mu\eta}v$ 分别化为

$$v_{\xi\xi} \pm v_{\eta\eta} + cv = f$$

的形式，其中 λ, μ 为常数.

第 2 章　双曲型方程

本章讨论一类典型的双曲型方程，即波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f$$

的初值问题和混合问题，对于初值问题利用特征线法、球平均法给出其解的表达式，对混合问题利用分离变量法给出其解的级数表达式，并证明其解的存在性，利用能量积分的方法证明其解的唯一性和稳定性.

2.1　一维波动方程的初值问题

2.1.1　叠加原理

由于我们讨论的波动方程及定解条件都是线性的，为了使讨论的初值问题简化，首先引入叠加原理.

自然界中的许多物理现象具有叠加性质，即多个因素同时引起的效果等于各个因素分别引起的效果之和，这个事实称为叠加原理. 例如，在常微分方程中已经知道，对于一个复杂的常微分方程的线性问题的求解，总可以把它分解为若干个比较简单的问题来求解，然后将这些简单问题的解叠加起来，就得到原问题的解，这种方法对偏微分方程的线性定解问题也是适用的.

叠加原理 I　设 $u_k(x,t)$ 是方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_k(x,t), \quad k = 1, 2, \cdots, m$$

的解，则函数 $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k u_k(x,t)$ 是方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k(x,t)$$

的解，其中 c_k $(k = 1, 2, \cdots, m)$ 是任意常数.

特别地，当 $u_k(x,t)$ 都满足齐次方程时， $u(x,t)$ 也满足此齐次方程.

叠加原理 II　设 $u_k(x,t)$ 是方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_k(x,t), \quad k = 1, 2, \cdots$$

的解，且无限和

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x,t)$$

关于 x 和 t 可以逐项微分两次，则和函数 $u(x,t)$ 是方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\sum_{k=1}^{\infty}c_k f_k(x,t)$$

的解，其中 $c_k\ (k=1,2,\cdots)$ 是一列已知常数.

特别地，当 $u_k(x,t)$ 都满足齐次方程时，$u(x,t)$ 也满足此齐次方程.

对于高维波动方程，也有类似叠加原理 I 、II 的结论. 对于线性定解问题，叠加原理也成立.

叠加原理III 设 $u_k(x,t)$ 是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f_k(x,t), & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi_k(x),\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_k(x), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

的解，其中 $k=1,2,\cdots,m$, 则函数 $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{m}c_k u_k(x,t)$ 是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\sum\limits_{k=1}^{m}c_k f_k(x,t), & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=\sum\limits_{k=1}^{m}c_k\varphi_k(x),\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum\limits_{k=1}^{m}c_k\psi_k(x), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

的解，其中 $c_k\ (k=1,2,\cdots,m)$ 是任意常数.

特别地，当 $u_k(x,t)$ 都满足齐次定解条件时，$u(x,t)$ 也满足此齐次定解条件.

对于弦振动方程的混合问题及高维波动方程的初值问题、混合问题，也有类似叠加原理III的结论.

利用叠加原理可以将初值问题简化.

在上半空间上考虑一维波动方程的初值问题

$$\text{(I)}\quad\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x),\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x), & x\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

由于定解问题 (I) 是线性的，因此可以分解为下面三个问题

$$\text{(II)}\quad\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x),\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0, & x\in\mathbb{R};\end{cases}$$

$$\text{(III)}\quad\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=0,\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x), & x\in\mathbb{R};\end{cases}$$

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

如果 u_1、u_2、u_3 分别为定解问题 (Ⅱ)、(Ⅲ)、(Ⅳ) 的解，由叠加原理可知，

$$u = u_1 + u_2 + u_3$$

为定解问题 (Ⅰ) 的解.

为了求定解问题 (Ⅱ)、(Ⅲ)、(Ⅳ) 的解，从下面定理可以看出定解问题 (Ⅲ) 是基本的，而定解问题 (Ⅱ) 及定解问题 (Ⅳ) 的解都可以通过它的解表示出来.

定理 2.1.1 如果 $W_h(x,t)$ 表示以 $h(x)$ 为初值的定解问题 (Ⅲ) 的解，则定解问题 (Ⅱ) 及定解问题 (Ⅳ) 的解 u_1 和 u_3 可分别表示为

$$u_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} W_\varphi(x,t) \tag{2.1.1}$$

和

$$u_3(x,t) = \int_0^t W_{f_\tau}(x, t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{2.1.2}$$

其中 $f_\tau(x) = f(x,\tau)$, $\tau \geqslant 0$ 为参数，且函数 $W_\varphi(x,t)$ 和函数 $W_{f_\tau}(x,t)$ 在半无界区域 $\{(x,t) \mid x \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ 上关于变量 x 和 t 充分光滑.

证明 先验证 $u_1(x,t)$ 为定解问题 (Ⅱ) 的解.

事实上，由函数 W_φ 的定义可知，$W_\varphi(x,t)$ 满足定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W_\varphi}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 W_\varphi}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ W_\varphi(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial W_\varphi}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

故由 $W_\varphi(x,t)$ 的光滑性可得

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 W_\varphi}{\partial t^2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(a^2 \frac{\partial^2 W_\varphi}{\partial x^2}\right) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial W_\varphi}{\partial t}\right) = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2},$$

$$u_1\big|_{t=0} = \frac{\partial W_\varphi}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial^2 W_\varphi}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(W_\varphi\big|_{t=0}\right) = 0,$$

从而 $u_1(x,t)$ 是定解问题 (Ⅱ) 的解.

下面验证 $u_3(x,t)$ 为定解问题 (Ⅳ) 的解.

令 $t_1 = t - \tau$, $\widetilde{W}_{f_\tau}(x,t_1) = W_{f_\tau}(x, t-\tau)$, 则由 $\widetilde{W}_{f_\tau}(x,t_1)$ 的定义可知，$\widetilde{W}_{f_\tau}(x,t_1)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \widetilde{W}_{f_\tau}}{\partial t_1^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 \widetilde{W}_{f_\tau}}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t_1 > 0, \\ \widetilde{W}_{f_\tau}\big|_{t_1=0} = 0, \quad \dfrac{\partial \widetilde{W}_{f_\tau}}{\partial t_1}\Big|_{t_1=0} = f(x,\tau), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

于是 $W_{f_\tau}(x,t-\tau)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 W_{f_\tau}}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 W_{f_\tau}}{\partial x^2}=0, & x\in\mathbb{R},\ 0\leqslant\tau<t<+\infty,\\ W_{f_\tau}\Big|_{t=\tau}=0, \quad \dfrac{\partial W_{f_\tau}}{\partial t}\Big|_{t=\tau}=f(x,\tau), & x\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

另一方面，由 $W_{f_\tau}(x,t-\tau)$ 的光滑性得

$$\frac{\partial u_3}{\partial t}=W_{f_\tau}(x,t-\tau)\big|_{\tau=t}+\int_0^t\frac{\partial W_{f_\tau}(x,t-\tau)}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau=\int_0^t\frac{\partial W_{f_\tau}(x,t-\tau)}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}&=\frac{\partial W_{f_\tau}}{\partial t}\Big|_{\tau=t}+\int_0^t\frac{\partial^2 W_{f_\tau}(x,t-\tau)}{\partial t^2}\,\mathrm{d}\tau\\ &=f(x,t)+a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^t W_{f_\tau}(x,t-\tau)\mathrm{d}\tau=a^2\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}+f(x,t),\end{aligned}$$

且

$$u_3(x,0)=0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,$$

从而 $u_3(x,t)$ 是定解问题 (IV) 的解. ▌

注 根据定积分的定义，表达式 (2.1.2) 可以写成

$$u_3(x,t)=\lim_{\Delta t_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}W_{f_{t_i}}(x,t-t_i)\Delta t_i,$$

其中 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$, $\Delta t_i=t_{i+1}-t_i$. 把非齐次方程的初值问题 (IV) 的解表示为一系列具有非齐次初始速度的齐次方程的定解问题 (III) 的解的叠加，这种求解过程称为 Duhamel (杜阿梅尔) 原理. 利用表达式 (2.1.2) 求解定解问题 (IV) 的方法，称为齐次化原理.

另外在定理 2.1.1 的证明中，用到了 W_φ 和 W_{f_τ} 充分光滑的假设条件，所以在确认由表达式 (2.1.1) 和 (2.1.2) 给出的函数是相应定解问题 (II) 和 (IV) 的解时，还必须严格地论证.

2.1.2 弦振动方程的初值问题 D'Alembert 公式

考虑无界弦的自由振动问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x), & x\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

将此定解问题中的方程写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0,$$

故利用函数

$$v(x,t)=\frac{\partial u}{\partial t}-a\frac{\partial u}{\partial x}$$

可把此定解问题分解为两个一阶方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\dfrac{\partial u}{\partial x} = v(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.1.3}$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + a\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ v(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.1.4}$$

为求上述定解问题的解，首先求出特征线. 因为初值问题 (2.1.3) 中的方程对应的特征方程为

$$\mathrm{d}x + a\mathrm{d}t = 0,$$

故特征线为

$$x = x_1(t) = C_1 - at,$$

其中 C_1 为任意常数.

沿特征线 $x = x_1(t)$, 初值问题 (2.1.3) 中的方程具有如下形式

$$\frac{\mathrm{d}u(x_1(t),t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u(x_1(t),t)}{\partial t} - a\frac{\partial u(x_1(t),t)}{\partial x} = v(x_1(t),t). \tag{2.1.5}$$

同理，初值问题 (2.1.4) 中的方程对应的特征线为

$$x = x_2(t) = C_2 + at,$$

其中 C_2 为任意常数.

沿特征线 $x = x_2(t)$ 有

$$\frac{\mathrm{d}v(x_2(t),t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v(x_2(t),t)}{\partial t} + a\frac{\partial v(x_2(t),t)}{\partial x} = 0.$$

另一方面，由初值问题 (2.1.4) 中的初始条件可得

$$v(x_2(t),t) = v(x_2(0),0) = \psi(x_2(0)),$$

故由 $x_2(0) = C_2 = x - at$ 可知，初值问题 (2.1.4) 的解为

$$v(x,t) = \psi(x - at).$$

把上式代入式 (2.1.5) 得

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t \psi(x_1(\tau) - a\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \psi(C_1 - 2a\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= -\frac{1}{2a}\int_{C_1}^{C_1-2at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

由此所确定的函数 $u(x,t)$ 即为所给初值问题的形式解.

我们不妨把求解上面初值问题的过程简单回顾一下. 首先通过对微分算子的因式分解, 把二阶方程式化成包含两个未知函数的一阶方程组, 并写成相应的定解问题, 然后用特征线法逐次求解每一个一阶偏微分方程的定解问题. 这里所说的特征线法, 它的主要思想在于沿着特征线, 一阶偏微分方程具有常微分方程的形式, 从而可以通过求解常微分方程去得到原来一阶偏微分方程的解.

对于上面的初值问题还可以首先化方程为标准型, 然后求通解, 最后利用初始条件确定特解, 这种求解方法称为行波法. 下面用行波法求该初值问题的解.

事实上, 由于所给初值问题中的方程对应的特征方程为

$$\mathrm{d}x^2 - a^2\mathrm{d}t^2 = 0,$$

特征线为

$$x - at = C_1, \quad x + at = C_2,$$

其中 C_1、C_2 为任意常数.

作自变量变换

$$\begin{cases} \xi = x - at, \\ \eta = x + at, \end{cases}$$

其 Jacobi 行列式为

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_t \\ \eta_x & \eta_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a \neq 0.$$

于是所给初值问题中的方程化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

将该方程先对 η 积分一次, 再对 ξ 积分一次, 得该方程的通解为

$$u = F(\xi) + G(\eta),$$

其中 F 及 G 为任意的单变量的二阶连续可微函数.

因此所给初值问题中的方程通解为

$$u(x,t) = F(x - at) + G(x + at).$$

将 $u(x,t)$, $u_t(x,t)$ 代入相应的初始条件可得

$$F(x) + G(x) = 0, \quad -aF'(x) + aG'(x) = \psi(x).$$

进而有

$$F'(x) + G'(x) = 0.$$

结合上式有

$$F'(x) = -\frac{1}{2a}\psi(x), \quad G'(x) = \frac{1}{2a}\psi(x).$$

分别积分一次得

$$F(x) = -\frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi + C_1, \quad G(x) = \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi + C_2,$$

其中 C_1 及 C_2 为任意常数.

利用 $u(x,0) = F(x) + G(x) = 0\ (\forall\, x \in \mathbb{R})$ 可得 $C_1 + C_2 = 0$, 于是

$$u(x,t) = -\frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

综上所述, 所给初值问题的形式解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

上述用行波法得到的解与特征线法所得到的解是相同的.

根据定理 2.1.1 可知一维波动方程的初值问题 (Ⅱ) 的形式解为

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right] = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)].$$

而初值问题 (Ⅳ) 的形式解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t \left[\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2a}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

利用叠加原理, 一般的一维波动方程的初值问题 (Ⅰ) 的形式解为

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ & + \frac{1}{2a}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

表达式 (2.1.6) 称为 D'Alembert 公式.

到现在为止, 表达式 (2.1.6) 只能说是形式解, 因为我们还不知道它是否具有光滑性. 为了使它确实是初值问题 (Ⅰ) 的解, 需要对方程的非齐次项 f 和初值 φ、ψ 加上一定的要求.

由前面的推导过程可以看出, 如果 $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$, 则可以直接验证, 由表达式 (2.1.6) 确定的函数 $u(x,t)$ 确为初值问题 (Ⅰ) 的解; 如果初值问题 (Ⅰ) 有解, 则此解一定可以由表达式 (2.1.6) 给出, 于是得到

定理 2.1.2 若 $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$, 则初值问题 (Ⅰ) 存在着唯一的解 $u(x,t)$. 此解由 (2.1.6) 式给出, 且 $u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$.

对于初值问题 (I), 如果 φ, ψ, f 不满足定理 2.1.2 的条件, 例如 $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, $\psi \in C^0(\mathbb{R})$, $f \in C^0(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$, 则由表达式 (2.1.6) 确定的函数 $u(x,t)$ 仍有意义, 它不是初值问题 (I) 在古典意义下的解, 而可认为是一种广义解.

定理 2.1.3 如果 $\varphi(x)$、$\psi(x)$、$f(x,t)$ 关于 x 都是具有相同周期的周期函数, 则由表达式 (2.1.6) 给出的初值问题 (I) 的解 $u(x,t)$ 关于 x 也是周期函数.

证明 设 $\varphi(x)$、$\psi(x)$、$f(x,t)$ 关于 x 的同周期为 l, 即

$$\varphi(x+l)=\varphi(x),\quad \psi(x+l)=\psi(x),\quad f(x+l,t)=f(x,t),$$

则

$$\varphi(x+l+at)+\varphi(x+l-at)=\varphi(x+at)+\varphi(x-at),$$

并利用变换 $\eta=\xi+l$ 可得

$$\int_{x+l-at}^{x+l+at}\psi(\eta)\,\mathrm{d}\eta=\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi+l)\,\mathrm{d}\xi=\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

$$\int_{x+l-a(t-\tau)}^{x+l+a(t-\tau)}f(\eta,\tau)\,\mathrm{d}\eta=\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi+l,\tau)\mathrm{d}\xi=\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi.$$

从而由表达式 (2.1.6) 可得

$$u(x+l,t)=u(x,t).$$

∎

类似可证, 当 $\varphi(x)$、$\psi(x)$、$f(x,t)$ 关于 x 均为奇 (或偶) 函数时, 由表达式 (2.1.6) 给出的初值问题 (I) 的解 $u(x,t)$ 关于 x 也是奇 (或偶) 函数.

例 2.1.1 初始正弦波的弦振动问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=\sin x, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0, & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

有解

$$u(x,t)=\frac{\sin(x-at)+\sin(x+at)}{2}=\sin x\cos at.$$

例 2.1.2 正弦初速度的弦振动问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sin x, & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

有解

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\sin\xi\,\mathrm{d}\xi\\&=\frac{\cos(x-at)-\cos(x+at)}{2a}=\frac{1}{a}\sin x\sin at.\end{aligned}$$

例 2.1.3 无界弦的受迫振动问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t\sin x, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

有解

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2a}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \tau \sin\xi \,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2a}\int_0^t \tau[-\cos(x+a(t-\tau)) + \cos(x-a(t-\tau))]\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \tau \frac{\sin x \sin a(t-\tau)}{a}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\sin x}{a}\int_0^t \tau \sin a(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\sin x}{a}\left[\frac{1}{a}\tau\cos a(t-\tau)\Big|_0^t + \frac{1}{a^2}\sin a(t-\tau)\Big|_0^t\right] \\ &= \frac{t\sin x}{a^2} - \frac{\sin x \sin at}{a^3}. \end{aligned}$$

2.1.3 解的依赖区域、决定区域和影响区域 波的传播

从上面的讨论可知, 波动方程的初值问题 (I) 的解可以唯一地表示成式 (2.1.6) 的形式. 下面从此解出发来讨论一维波动方程解的依赖区域、决定区域和影响区域的概念, 以及波的传播特性.

以最简单的情形——无界弦的自由振动为例, 此时方程的非齐次项 $f(x,t) \equiv 0$, 而对应的初值问题可写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

由 (2.1.6) 式可知, 此初值问题的形式解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

依赖区域 由解的构造可以看出, 对于上半平面 $\{(x,t) \mid x \in \mathbb{R},\ t > 0\}$ 内的任意一点 (x_0,t_0), 对应的函数值 $u(x_0,t_0)$ 由初始条件 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 在 x 轴的区间 $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ 上的值唯一确定, 而与 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 在该区间外的值无关, 把这个区间 $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ 称为点 (x_0,t_0) 对初值的依赖区间, 它是过点 (x_0,t_0) 的两条特征线 $x - at = C_1$ 和 $x + at = C_2$ 交截 x 轴所得的区间 (图 2.1.1).

从依赖区间定义可知, 点 (x_0,t_0) 的依赖区间只与方程中系数 a 及点 (x_0,t_0) 有关, 而与初值函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 无关.

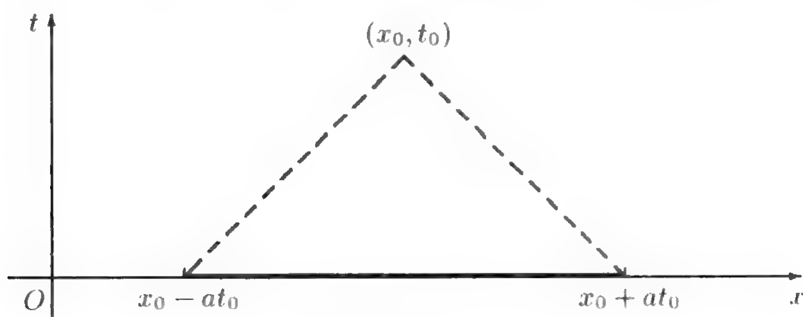


图 2.1.1

从依赖区间定义可知，点 (x_0, t_0) 的依赖区间只与方程中系数 a 及点 (x_0, t_0) 有关，而与初值函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 无关.

决定区域　对于初始直线 $t = 0$ 上的任意一个区间 $[x_1, x_2]$，过点 x_1 作特征线 $x = x_1 + at$，过点 x_2 作特征线 $x = x_2 - at$. 由特征线和区间 $[x_1, x_2]$ 一起构成一个三角形区域 $\triangle$(图 2.1.2)，即

$$\triangle = \left\{(x,t) \,\middle|\, x_1 + at \leqslant x \leqslant x_2 - at,\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{x_2 - x_1}{2a}\right\}.$$

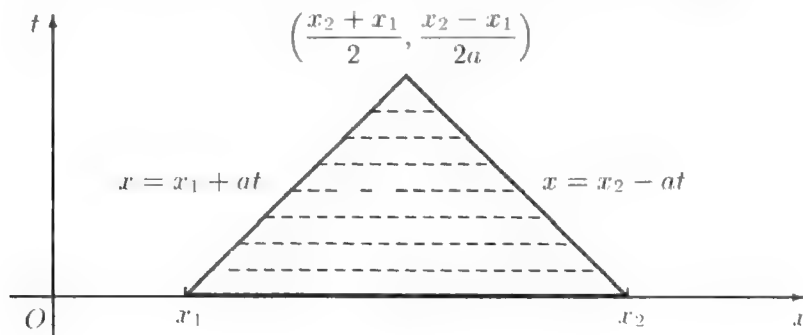


图 2.1.2

对于区域 $\triangle$ 中的任一点 (x, t)，它的依赖区间都包含在区间 $[x_1, x_2]$ 中，因此解在区域 $\triangle$ 中的值完全由区间 $[x_1, x_2]$ 上所给的初始条件决定，而与区间 $[x_1, x_2]$ 外的初始条件无关，把这个三角形区域 $\triangle$ 称为区间 $[x_1 x_2]$ 的决定区域. 显然三角形区域 $\triangle$ 是以点 $\left(\dfrac{x_2 + x_1}{2}, \dfrac{x_2 - x_1}{2a}\right)$ 为顶点、区间 $[x_1, x_2]$ 为底边的等腰三角形，它只与方程中系数 a 及区间 $[x_1, x_2]$ 有关，而与初值函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 无关.

影响区域　对于给定 X 轴上任意一点 $(x_0, 0)$，初值函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 在该点的值，将影响上半平面 $\{(x, t) \mid x \in \mathbb{R},\ t > 0\}$ 内哪些点处解 $u(x, t)$ 的值呢？容易看出，它只对由点 $(x_0, 0)$ 向 t 增加的方向发出的两条特征线所围成的区域

$$D = \{(x, t) \mid x_0 - at \leqslant x \leqslant x_0 + at,\ 0 \leqslant t < +\infty\}$$

中的解值产生影响. 这是因为区域 D 内任一点的依赖区间都包含点 $(x_0, 0)$，而在区域 D 外任一点的依赖区间都不包含点 $(x_0, 0)$. 把这个区域 D 称为点 $(x_0, 0)$ 的影响

区域. 显然区域 D 只与方程中系数 a 及 $(x_0,0)$ 有关, 而与初值函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 无关, 这也说明在初始直线 $t=0$ 上某点处的扰动或信号是以有限速度 a 向两侧传播的. 同样可以确定初始直线 $t=0$ 上的区间 $[x_1,x_2]$ 的影响区域为 (图 2.1.3)

$$\{(x,t)\mid x_1-at\leqslant x\leqslant x_2+at,\ 0\leqslant t<+\infty\}.$$

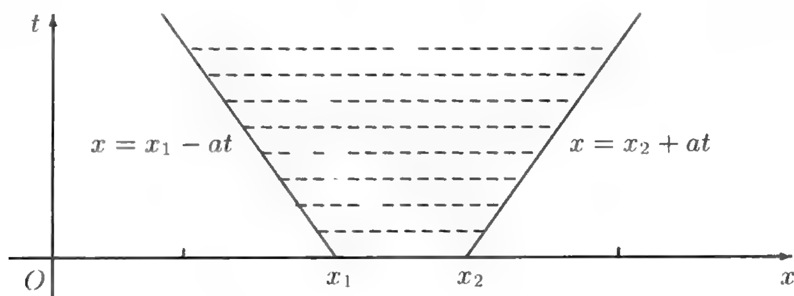


图 2.1.3

波的传播 我们先将解 $u(x,t)$ 改写成

$$u(x,t)=F(x-at)+G(x+at),$$

其中

$$F(x-at)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\frac{C}{2a},$$
$$G(x+at)=\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi-\frac{C}{2a},$$

C 为任意常数.

考察函数

$$u_1(x,t)=F(x-at), \tag{2.1.7}$$

并假设 $u=F(x)$ 的图像如图 2.1.4 中的实线所示.

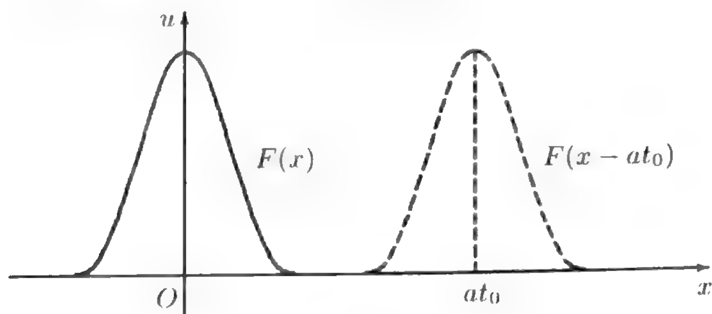


图 2.1.4

显然 $u_1(x,t)$ 是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=F(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=-aF'(x), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

的解. 在时刻 $t=0$ 时, $u_1(x,0)=F(x)$ 对应于弦的初始振动状态 (图 2.1.4 中实线所示). 经过时刻 $t=t_0$ 时, $u_1(x,t_0)=F(x-at_0)$ (图 2.1.4 中虚线所示).

由此可见, 振动弦的外形保持不变, 它在 xOu 平面上相当于原来的图形向右平移一段距离 at_0, 这说明当方程的解表示为 (2.1.7) 的形式时, 弦线上的质点在 $t=0$ 时振动所构成的波形 $u=F(x)$, 以常速度 a 向右传播 (图 2.1.5), 而波形保持不变, 它称为右传播波或正行波.

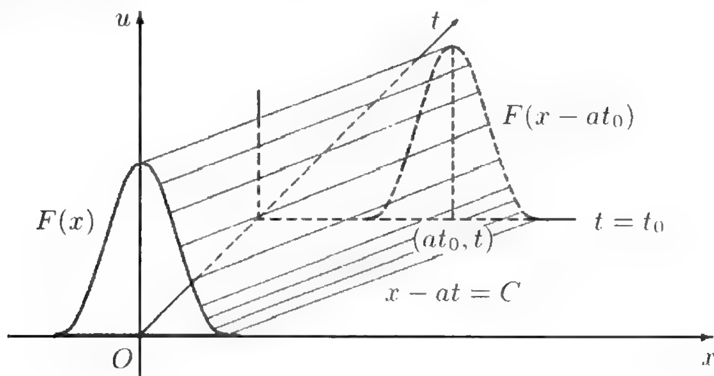


图 2.1.5

同理可知, $u_2=G(x+at)$ 则表示以速度 a 向左传播的波, 称为左传播波或逆行波. 因此, 这种初值问题的解可以理解为向两个方向传播的行波之和, 这种求解方法也常被称作行波法.

从上面的讨论可以看到, 不论是依赖区域、决定区域还是影响区域, 它们的边界除了 x 轴上的部分以外总是落在上半平面 $\{(x,t)\mid x\in\mathbb{R},\ t>0\}$ 内形如 $x\pm at=C$ (C 为常数) 的直线上. 例如, 波动方程

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad x\in\mathbb{R},\ t>0$$

的解, 在点 (x_0,t_0) 的依赖区间的端点 $(x_0\pm at_0,0)$ 分别落在过点 (x_0,t_0) 的直线 $x\pm at=x_0\pm at_0$ 上; 区间 $[x_1,x_2]$ 的决定区域的边界除了 x 轴上的一段 $[x_1,x_2]$ 以外, 分别落在直线 $x-at=x_1$ 和 $x+at=x_2$ 之上; 而区间 $[x_1,x_2]$ 的影响区域的边界除了 x 轴上的一段 $[x_1,x_2]$ 以外, 分别落在直线 $x+at=x_1$ 和 $x-at=x_2$ 之上. 由此可见, 与波动方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2},\quad x\in\mathbb{R},\ t>0$$

相对应的两族直线 $x\pm at=C$ 恰好是特征方程的两族积分曲线, 它们对波动方程的研究起着重要作用, 而这两族直线 $x\pm at=C$ 就称为波动方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2},\quad x\in\mathbb{R},\ t>0$$

的两族特征线.

假设给定波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

的一对特征线 $x \pm at = C_0$, 在特征线 $x - at = C_0$ 上右传播波为

$$u_1(x,t) = F(x - at) = F(C_0),$$

即右传播波在特性线 $x - at = C_0$ 上取常数值 $F(C_0)$.

同理可知，左传播波

$$u_2(x,t) = G(x + at)$$

在特征线 $x + at = C_0$ 上也取常数值 $G(C_0)$.

综上所述，我们可以说，传播波实际上是沿着特征线传播的，而初值问题 (Ⅲ) 的求解方法正是利用了波的这种特性，把其求解方法称为特征线法.

习题 2.1

2.1.1 设 $ABCD$ 为 (x,t) 平面上由特征线所围成平行四边形的四条边， u 为自由弦振动方程的解，证明

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D).$$

2.1.2 对于自由振动的弦，当初始资料 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 满足什么条件时，弦振动方程的解仅由右传播波组成？

2.1.3 当 β 取何值时，利用代换 $u = e^{\beta x} v$ 可将方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = b \frac{\partial u}{\partial x}$$

中的一阶导数项消去，其中 a 和 b 为常数.

2.1.4 当 α 取何值时，利用代换 $u = e^{\alpha t} v$ 可将方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c \frac{\partial u}{\partial t}$$

中的一阶导数项消去，其中 a 和 c 为常数.

2.1.5 在上半平面 $\{(x,t) \mid x \in \mathbb{R},\ t > 0\}$ 上给定一点 $M(2,5)$, 对于弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

来说，点 M 的依赖区间是什么，它是否落在点 $(1,0)$ 的影响区域内？

2.1.6 利用行波法，求解弦振动方程的 Goursat 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad -at < x < at,\ t > 0, \\ u|_{x-at=0} = \varphi(x), \quad u|_{x+at=0} = \psi(x), \end{cases}$$

其中 $\varphi(0) = \psi(0)$.

2.1.7 求方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x > \frac{t}{k},\ t > 0$$

满足如下定解条件

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u(x,kx) = \psi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad x \geqslant 0$$

的解，其中 $k > 1$ 为常数，且 $\varphi_0(0) = \psi(0)$.

2.1.8 求解下列初值问题:

(1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \sin \pi x, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \mathrm{e}^{-x^2}, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 1, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(4) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = 1, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(5) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t \sin x, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sin x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(6) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = x, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(7) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{tx}{(1+x^2)^2}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \dfrac{1}{1+x^2}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2.2　高维波动方程的初值问题

在本节中我们用 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 的点，对 $\forall\, x,\ y \in \mathbb{R}^3$. 用

$$|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_2)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^3}$$

表示点 x 与 y 的距离，并使用记号

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

2.2.1 三维波动方程的初值问题 球平均法

由第 1 节的讨论可知，如果求三维波动方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{2.2.1}$$

的解，可先求解如下的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{2.2.2}$$

然后再利用叠加原理及定理 2.1.1, 就可求得初值问题 (2.2.1) 的解.

从物理现象上看，有些波的传播具有球对称性，而具有球对称性的波动方程，经球坐标变换后可化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = f(r,t)$$

的形式. 这时三维波动方程的初值问题实际上化成一维波动方程的初值问题，于是可利用 D'Alembert 公式求解.

下面考虑不具有球对称性的情况，先引进函数的球面平均值的概念.

定义 2.2.1 设 S_r^x 表示以 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 为球心，以 r 为半径的球面. 对任一函数 $h(x) = h(x_1, x_2, x_3)$, 称

$$M_h(x,r) = \frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{S_r^x} h(\xi)\,\mathrm{d}S = \frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{|\xi - x| = r} h(\xi)\,\mathrm{d}S$$

为 $h(x)$ 的球面平均值，简称球平均函数.

由定义 2.2.1 可知，如果 $h(x)$ 为 x 的连续函数，则

$$M_h(x,0) = \lim_{r\to 0^+} M_h(x,r) = \frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{S_r^x} h(\xi)\,\mathrm{d}S = h(x).$$

假设 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 其中

$$\begin{cases} \alpha_1 = \cos\varphi\sin\theta, \\ \alpha_2 = \sin\varphi\sin\theta, \\ \alpha_3 = \cos\theta, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

则球面 S_r^x 上的点 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 可表示为 $x + r\alpha$, 即

$$\xi_1 = x_1 + r\alpha_1, \quad \xi_2 = x_2 + r\alpha_2, \quad \xi_3 = x_3 + r\alpha_3.$$

利用球坐标可将球平均函数 $M_h(x,r)$ 写为

$$M_h(x,r) = \frac{1}{4\pi r^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} h(x_1+\alpha_1 r, x_2+\alpha_2 r, x_3+\alpha_3 r) r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{|\alpha=1|} h(x+\alpha r)\,\mathrm{d}_r\sigma = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{|\alpha=1|} h(x+\alpha r)\,\mathrm{d}\sigma, \tag{2.2.3}$$

其中 $\mathrm{d}_r\sigma = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = r^2\mathrm{d}\sigma$.

为了讨论问题方便，利用 (2.2.3) 式可将 $M_h(x,r)$ 的定义按如下方式延拓

$$M_h(x,r) = \begin{cases} M_h(x,r), & r>0, \\ h(x), & r=0, \\ M_h(x,-r), & r<0. \end{cases}$$

由此可知，延拓后的 $M_h(x,r)$ 关于 r 是偶函数.

定理 2.2.1 设 $h(x)\in C^2$, 则球平均函数 $M_h(x,r)\in C^2$, 且满足初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 M_h(x,r)}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial M_h(x,r)}{\partial r} = \Delta M_h(x,r), & x\in\mathbb{R}^3,\ r>0. \\ M_h(x,0) = h(x), \quad \left.\dfrac{\partial M_h(x,r)}{\partial r}\right|_{r=0} = 0, & x\in\mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{2.2.4}$$

证明 由式 (2.2.3) 可知， $M_h(x,r)\in C^2$, 于是利用 Gauss 公式得

$$\frac{\partial M_h(x,r)}{r} = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{|\alpha|=1}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial h}{\xi_i}\frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{|\alpha|=1}\sum_{i=1}^{3} h_{\xi_i}(x+\alpha r)\alpha_i\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{|\alpha|=1}\sum_{i=1}^{3} h_{\xi_i}(x+\alpha r)\alpha_i\,\mathrm{d}_r\sigma$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{|\xi-x|=r}\sum_{i=1}^{3} h_{\xi_i}(\xi)\alpha_i\,\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2}\iiint\limits_{|\xi-x|\leqslant r}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial\xi_2^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial\xi_3^2}\right)\mathrm{d}\xi$$

其中 $\xi_i = x_i+\alpha_i r$, $\mathrm{d}\xi = \mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_3$, $h_{\xi_i} = \dfrac{\partial h}{\partial\xi_i}$ $(i=1,2,3)$.

记 $\xi = x+z$, 则由

$$h_{\xi_i}(x+z) = \frac{\partial h(x+z)}{\partial\xi_i} = \frac{\partial h(x+z)}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\xi_i} = \frac{\partial h(x+z)}{\partial x_i} \quad (i=1,2,3)$$

可得

$$\frac{\partial^2 h}{\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial\xi_2^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial\xi_3^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial x_3^2} = \Delta_x h(x+z).$$

于是

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial M_h(x,r)}{r} &= \frac{1}{4\pi r^2}\iiint\limits_{|\xi-x|\leqslant r}\Big(\frac{\partial^2 h}{\partial \xi_1^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial \xi_2^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial \xi_3^2}\Big)\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{4\pi r^2}\iiint\limits_{|z|\leqslant r}\Delta_x h(x+z)\mathrm{d}z = \frac{1}{4\pi r^2}\Delta_x\Big(\iiint\limits_{|z|\leqslant r} h(x+z)\mathrm{d}z\Big) \\
&= \frac{1}{4\pi r^2}\Delta_x\left[\int_0^r \mathrm{d}\rho \iint\limits_{|z|=\rho} h(x+z)\,\mathrm{d}S\right] \\
&= \frac{1}{4\pi r^2}\Delta_x\left[\int_0^r \Big(\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{|\xi-x|=\rho} h(\xi)\,\mathrm{d}S\Big)\mathrm{d}\rho\right] \\
&= \frac{1}{r^2}\Delta_x\left[\int_0^r \rho^2 M_h(x,\rho)\mathrm{d}\rho\right] = \frac{1}{r^2}\int_0^r \rho^2\Delta_x M_h(x,\rho)\mathrm{d}\rho.
\end{aligned}
$$

将上式两端乘以 r^2 后，再关于 r 求偏导数可得

$$
r^2\Delta_x M_h(x,r) = \frac{\partial}{r}\left[r^2\frac{\partial M_h(x,r)}{\partial r}\right] = 2r\frac{\partial M_h(x,r)}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 M_h(x,r)}{\partial r^2},
$$

上式两边再除以 r^2, 即得

$$
\frac{\partial^2 M_h(x,r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial M_h(x,r)}{\partial r} = \Delta_x M_h(x,r).
$$

最后，由 (2.2.3) 可得 $M_h(x,0)=h(x)$, 由 $h\in C^2$, 并利用中值定理，得

$$
\left.\frac{\partial M_h(x,r)}{\partial r}\right|_{r=0} = \lim_{r\to 0}\left[\frac{1}{4\pi r^2}\iiint\limits_{|\xi-x|\leqslant r}\Delta_\xi h(\xi)\mathrm{d}\xi\right] = \lim_{r\to 0}\frac{r\Delta_\xi h(\eta)}{3} = 0.
$$

综上可知， $M_h(x,r)\in C^2$, 且满足 (2.2.4). ∎

令 $r=at$, 初值问题 (2.2.4) 可改写为如下形式

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2[tM_h(x,at)]}{\partial t^2} - a^2\Delta[tM_h(x,at)] = 0, & x\in\mathbb{R}^3,\ t>0, \\
[tM_h(x,at)]|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial[tM_h(x,at)]}{\partial t}\right|_{t=0} = h(x), & x\in\mathbb{R}^3.
\end{cases}
$$

利用此形式可证明如下的定理.

定理 2.2.2 设 $\psi(x)\in C^2$, 则 $u(x,t)=tM_\psi(x,at)\in C^2$ 为初值问题 (2.2.2) 的解，且

$$
u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at}^x}\psi(\xi)\,\mathrm{d}S. \tag{2.2.5}
$$

证明 由 $\psi(x)\in C^2$ 可知， $u(x,t)=tM_\psi(x,at)\in C^2$, 故由 $r=at$ 可得

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = M_\psi(x,at) + at\left.\frac{\partial M_\psi(x,r)}{\partial r}\right|_{r=at},
$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2a\frac{\partial M_\psi(x,r)}{\partial r}\Big|_{r=at} + a^2 t\frac{\partial^2 M_\psi(x,r)}{\partial r^2}\Big|_{r=at},$$

从而由定理 2.2.1 可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 t\Big[\frac{\partial^2 M_\psi(x,r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial M_\psi(x,r)}{\partial r}\Big]\Big|_{r=at} = a^2 t\Delta M_\psi(x,at) = a^2\Delta u(x,t),$$

且

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0^+}\Big[M_\psi(x,at) + at\frac{\partial M_\psi(x,r)}{\partial r}\Big|_{r=at}\Big] = M_\psi(x,0) = \psi(x),$$

$$u(x,0) = \lim_{t\to 0} tM_\psi(x,at) = 0.$$

综上可知， $u(x,t) = tM_\psi(x,at) \in C^2$ 为初值问题 (2.2.2) 的解，且

$$u(x,t) = \frac{t}{4\pi a^2 t^2}\iint_{S_{at}^x}\psi(\xi)\mathrm{d}S = \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at}^x}\psi(\xi)\mathrm{d}S. \qquad ▌$$

类似于定理 2.1.1 可证得下述定理.

定理 2.2.3　若 $\varphi \in C^3$，则函数 $u(x,t) = \dfrac{\partial}{\partial t}[tM_\varphi(x,at)] \in C^2$ 为初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = 0, & x\in\mathbb{R}^3,\ t>0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, & x\in\mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{2.2.6}$$

的解，且

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{1}{t}\iint_{S_{at}^x}\varphi(\xi)\,\mathrm{d}S\Big]. \tag{2.2.7}$$

证明　令 $W(x,t) = tM_\varphi(x,at)$，则由定理 2.2.2 可知， $W(x,t)$ 满足初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} - a^2\Delta W = 0, & x\in\mathbb{R}^3,\ t>0, \\ W(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial W}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x), & x\in\mathbb{R}^3. \end{cases}$$

并由 $\varphi\in C^3$ 及 (2.2.3) 式可知， $W(x,t)\in C^3$，故有

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a^2\Delta W, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}(a^2\Delta W) = a^2\Delta\Big(\frac{\partial W}{\partial t}\Big) = a^2\Delta u.$$

于是

$$u(x,0) = \frac{\partial W}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = a^2\Delta W\big|_{t=0} = 0 \quad (x\in\mathbb{R}^3).$$

综上可知， $u(x,t) = \dfrac{\partial}{\partial t}[tM_\varphi(x,at)] \in C^2$ 为初值问题 (2.2.6) 的解，且

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{1}{t}\iint_{S_{at}^x}\varphi(\xi)\,\mathrm{d}S\Big]. \qquad ▌$$

定理 2.2.4 若 $f(x,t)\in C^2$, 则由下式确定的函数

$$u(x,t)=\int_0^t (t-\tau)M_{f_\tau}(x,a(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

为初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\Delta u=f(x,t), & x\in\mathbb{R}^3,\ t>0,\\ u(x,0)=0,\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0, & x\in\mathbb{R}^3\end{cases}\tag{2.2.8}$$

属于 C^2 的解, 且

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{V_{at}^x}\frac{f\left(\xi,t-\dfrac{r}{a}\right)}{r}\,\mathrm{d}V,\tag{2.2.9}$$

其中 $f_\tau(x)=f(x,\tau)$, M_{f_τ} 为 f_τ 在球面 $S^x_{a(t-\tau)}$ 上的球平均函数, V_{at} 是以 x 为心、 at 为半径的球体, $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in V_{at}$ 是球内的点,

$$r=\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2+(\xi_3-x_3)^2}.$$

证明 令 $t_1=t-\tau$, $W(x,t_1)=t_1M_{f_\tau}(x,at_1)$, 则由 $f\in C^2$ 可知, $W(x,t_1)\in C^2$, 于是由定理 2.2.2 可知, $W(x,t_1)$ 满足初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 W}{\partial t_1^2}-a^2\Delta W=0, & x\in\mathbb{R}^3,\ t_1>0,\\ W(x,0)=0,\quad \left.\dfrac{\partial W}{\partial t_1}\right|_{t_1=0}=f_\tau(x)|_{t=\tau}=f(x,t), & x\in\mathbb{R}^3.\end{cases}$$

另一方面, 由 $W(x,t_1)=t_1M_{f_\tau}(x,at_1)$ 可得

$$u(x,t)=\int_0^t (t-\tau)M_{f_\tau}(x,a(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau=\int_0^t W(x,t-\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

将上式关于 t 求导数, 得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=W(x,t-\tau)\big|_{\tau=t}+\int_0^t\frac{\partial W(x,t-\tau)}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau=\int_0^t\frac{\partial W(x,t-\tau)}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau,$$

再对上式关于 t 求导数, 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=\left.\frac{\partial W}{\partial t}\right|_{\tau=t}+\int_0^t\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\,\mathrm{d}\tau\\&=\left.\frac{\partial W}{\partial t_1}\right|_{t_1=0}+a^2\int_0^t\Delta_x W(x,t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\\&=f(x,t)+a^2\Delta_x\left[\int_0^t W(x,t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]=a^2\Delta_x u+f(x,t),\end{aligned}$$

从而

$$u|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0.$$

综上可知，$u(x,t)\in C^2$ 为初值问题 (2.2.8) 的解，并由球平均函数的定义得

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_0^t (t-\tau) M_{f_\tau}(x, a(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t \frac{1}{t-\tau}\,\mathrm{d}\tau \iint\limits_{|\xi-x|=a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at} \iint\limits_{|\xi-x|=r} \frac{f\left(\xi, t-\dfrac{r}{a}\right)}{r}\,\mathrm{d}S\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{V_{at}^x} \frac{f\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3, t-\dfrac{r}{a}\right)}{r}\,\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_3,
\end{aligned}
$$

其中 $r=a(t-\tau)$.

通常把表达式 (2.2.9) 的右端积分称为推迟势.

综上所述，利用叠加原理可得如下定理:

定理 2.2.5 设 $\varphi(x)\in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi(x)\in C^2(\mathbb{R}^3)$, $f(x,t)\in C^2(\overline{Q})$. 则由表达式

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{1}{t}\iint\limits_{S_{at}^x}\varphi(\xi)\,\mathrm{d}S\Big] + \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at}^x}\psi(\xi)\,\mathrm{d}S \\
+ \frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{V_{at}^x}\frac{f\left(\xi, t-\dfrac{r}{a}\right)}{r}\,\mathrm{d}V
\end{aligned} \tag{2.2.10}
$$

确定的函数 $u(x,t)$ 属于 $C^2(\overline{Q})$, 且是定解问题 (2.2.1) 的解，其中

$$
Q=\{(x,t)\mid x\in\mathbb{R}^3, t>0\},\quad r=\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2+(\xi_3-x_3)^2}.
$$

当 $f(x,t)\equiv 0$ 时，利用球坐标可将公式 (2.2.10) 写为

$$
\begin{aligned}
u(x_1,x_2,x_3,t) =& \frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\Big] \\
&+ \frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\psi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi,
\end{aligned} \tag{2.2.11}
$$

其中

$$
\begin{cases}
\xi_1 = x_1 + at\cos\varphi\sin\theta, \\
\xi_2 = x_2 + at\sin\varphi\sin\theta, \\
\xi_3 = x_3 + at\cos\theta \quad (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi).
\end{cases}
$$

公式 (2.2.11) 通常称为三维 Poisson 公式.

2.2.2 二维波动方程的初值问题

利用类似于上一段的讨论方法，求解一般的二维波动方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = f(x_1,x_2,t), \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ t>0, \\ u(x_1,x_2,0)=\varphi(x_1,x_2), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{2.2.12}$$

也可先求如下的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = 0, \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ t>0, \\ u(x_1,x_2,0)=0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{2.2.13}$$

的解，然后利用叠加原理及定理 2.1.1, 就可求得初值问题 (2.2.12) 的解.

先来分析初值问题 (2.2.2) 的解. 由式 (2.2.5) 可知，上半球面 Σ_1 的方程为

$$y_3 = x_3 + \sqrt{(at)^2 - r^2} \quad \left(0 \leqslant r = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2} \leqslant at\right),$$

故面积微元为

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1+\left(\frac{\partial y_3}{\partial y_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y_3}{\partial y_2}\right)^2}\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 = \frac{at}{\sqrt{(at)^2-r^2}}\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2,$$

于是由曲面积分的计算方法可得

$$\iint\limits_{\Sigma_1}\psi(y_1,y_2,y_3)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{r\leqslant at}\psi(y_1,y_2,y_3)\frac{at}{\sqrt{(at)^2-r^2}}\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2.$$

同理，由下半球面 Σ_2 的方程

$$y_3 = x_3 - \sqrt{(at)^2 - r^2} \quad \left(0 \leqslant r = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2} \leqslant at\right),$$

可得

$$\iint\limits_{\Sigma_2}\psi(y_1,y_2,y_3)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{r\leqslant at}\psi(y_1,y_2,y_3)\frac{at}{\sqrt{(at)^2-r^2}}\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2.$$

综上可知，当 ψ 不含变量 x_3 时， (2.2.5) 式可写为

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{|y-x|=at}\psi(y_1,y_2)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma_1}\psi(y_1,y_2)\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{\Sigma_2}\psi(y_1,y_2)\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{2at}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{r\leqslant at}\frac{\psi(y_1,y_2)}{\sqrt{(at)^2-r^2}}\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 = \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{r\leqslant at}\frac{\psi(y_1,y_2)}{\sqrt{(at)^2-r^2}}\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2, \end{aligned}$$

故 u 也不含 x_3, 于是由定理 2.2.2 可知，当 $\psi(x_1,x_2)\in C^2$ 时,

$$u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{r\leqslant at}\frac{\psi(y_1,y_2)}{\sqrt{(at)^2-r^2}}\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2$$

为初值问题 (2.2.13) 的解，其中 $r=\sqrt{(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}$.

利用叠加原理及定理 2.1.1 可得如下定理.

定理 2.2.6 若 $\varphi(x_1,x_2)\in C^3(\mathbb{R}^2)$, $\psi(x_1,x_2)\in C^2(\mathbb{R}^2)$, $f(x_1,x_2,t)\in C^2(\overline{Q})$, 则由表达式

$$u(x_1,x_2,t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left[\iint\limits_{\Sigma_{at}^{(x_1,x_2)}}\frac{\varphi(y_1,y_2)}{\sqrt{(at)^2-r^2}}\mathrm{d}\sigma\right]+\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{\Sigma_{at}^{(x_1,x_2)}}\frac{\psi(y_1,y_2)}{\sqrt{(at)^2-r^2}}\mathrm{d}\sigma$$
$$+\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\mathrm{d}\tau\iint\limits_{\Sigma_{a(t-\tau)}^{(x_1,x_2)}}\frac{f(y_1,y_2,\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-r^2}}\mathrm{d}\sigma \tag{2.2.14}$$

确定的函数 $u(x_1,x_2,t)$ 属于 $C^2(\overline{Q})$, 且是初值问题 (2.2.12) 的解，其中 $\Sigma_{at}^{(x_1,x_2)}$ 是以点 (x_1,x_2) 为心、 at 为半径的圆盘,

$$Q=\{(x_1,x_2,t)\mid(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,t>0\},\quad r=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}.$$

当 $f(x_1,x_2,t)\equiv 0$ 时，利用极坐标可将公式 (2.2.14) 写为

$$u(x_1,x_2,t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(x_1+r\cos\theta,x_2+r\sin\theta)}{\sqrt{(at)^2-r^2}}r\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\right]$$
$$+\frac{1}{2\pi a}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\psi(x_1+r\cos\theta,x_2+r\sin\theta)}{\sqrt{(at)^2-r^2}}r\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r. \tag{2.2.15}$$

公式 (2.2.15) 通常称为二维 Poisson 公式.

上述这种由三维空间初值问题的解导出二维空间的解的方法称为**降维法**. 其基本思想是将二元函数视为三元函数. 利用降维法可由 (2.2.14) 式推出 (2.1.6) 式.

由表达式 (2.2.10) 或 (2.2.14) 可以证明，满足定理 2.2.5 或定理 2.2.6 条件的初值问题 (2.2.1) 或 (2.2.12) 的解是唯一的.

例 2.2.1 求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\Delta u=0, & (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\ t>0,\\ u(x_1,x_2,x_3,0)=x_1^2+x_2^2+x_3^2, & \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=x_1x_2,\quad (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3.\end{cases}$$

解 首先利用降维法，由 D'Alembert 公式可知，三个波动方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}=0, & x_i\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u_i(x_i,0)=x_i^2, & \dfrac{\partial u_i}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,\quad x_i\in\mathbb{R}\end{cases}$$

的形式解 $(i=1,2,3)$ 为

$$u_i(x_i,t)=\frac{1}{2}\left[(x_i+at)^2+(x_i-at)^2\right]=x_i^2+a^2t^2.$$

其次，由 Poisson 公式 (2.2.15) 可知，二维初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_4}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u_4}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_4}{\partial x_2^2}\right), & (x_1, x_2) \in R^2,\ t > 0, \\ u_4(x_1, x_2, 0) = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u_4}{\partial t}\right|_{t=0} = x_1 x_2, & (x_1, x_2) \in R^2 \end{cases}$$

的形式解为

$$\begin{aligned} u_4(x_1, x_2, t) &= \frac{1}{2\pi a}\int_0^{at}\int_0^{2\pi} \frac{(x_1 + r\cos\theta)(x_2 + r\sin\theta)}{\sqrt{(at)^2 - r^2}} r\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{2\pi a}\int_0^{at}\int_0^{2\pi} \frac{x_1 x_2}{\sqrt{(at)^2 - r^2}} r\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{x_1 x_2}{2a}\int_0^{at} \frac{1}{\sqrt{(at)^2 - r^2}}\mathrm{d}r^2 = x_1 x_2 t, \end{aligned}$$

其中

$$(x_1 + r\cos\theta)(x_2 + r\sin\theta) = x_1 x_2 + x_1 r\sin\theta + x_2 r\cos\theta + r^2\cos\theta\sin\theta,$$

$$\int_0^{at}\int_0^{2\pi} \frac{x_1 r\sin\theta}{\sqrt{(at)^2 - r^2}} r\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = \int_0^{at}\left[\frac{x_1 r^2}{\sqrt{(at)^2 - r^2}}\cos\theta\Big|_0^{2\pi}\right]\mathrm{d}r = 0,$$

$$\int_0^{at}\int_0^{2\pi} \frac{x_2 r\cos\theta}{\sqrt{(at)^2 - r^2}} r\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = 0, \quad \int_0^{at}\int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{(at)^2 - r^2}} r\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = 0.$$

利用叠加原理可知，所求初值问题的解为

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3a^2t^2 + x_1 x_2 t.$$

上述这种将一维初值问题的解或二维初值问题的解视为三维初值问题的解的方法也称为降维法.

习题 2.2

2.2.1 求解下列波动方程的柯西问题：

(1) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0, \\ u(x, y, 0) = x^2(x + y), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0, \\ u(x, y, 0) = 3x + 2y, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = 0, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ t > 0, \\ u(x, y, z, 0) = x^3 + yz, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \end{cases}$

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = 2(y-t), \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ t>0, \\ u(x,y,z,0)=0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x^2+yz, \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3; \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = 0, \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ t>0, \\ u(x,y,z,0)=\mathrm{e}^{\alpha(x+y+z)}, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sqrt{3}\,\alpha\mathrm{e}^{\alpha(x+y+z)}, \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3. \end{cases}$$

其中 α 为实常数. (提示：利用第 1 章第 1 节习题 1.1.7)

2.2.2 利用降维法，由三维 Poisson 公式或二维 Poisson 公式，导出弦振动方程初值问题解的 D'Alembert 公式.

2.2.3 写出三维齐次波动方程的所有一次和二次多项式形式的解.

2.2.4 证明：函数

$$u(x,y,t)=\frac{1}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}}$$

在锥体 $\{(x,y,t)\mid x^2+y^2<t^2,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ t>0\}$ 中是二维齐次波动方程的解.

2.2.5 如果 $u(x,y,z,t)$ 是三维波动方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = 0, \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ t>0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x)+g(y), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = h(y)+\psi(z), \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \end{cases}$$

的解，试求解的表达式.

2.2.6 如果 $u(x_1,x_2,x_3,t)$ 是定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = 0, \quad (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\ t>0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(r), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(r), \quad (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \end{cases}$$

的解，试求 $u(x_1,x_2,x_3,t)$ 的表达式，并求 $\lim\limits_{r\to 0} u(x_1,x_2,x_3,t)$, 其中 $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$.

2.2.7 求解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u - c^2 u = 0, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ t>0, \\ u(x,y,0)=\varphi(x,y), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x,y), \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2, \end{cases}$$

其中 c 为常数. (提示：作代换 $v(x,y,z,t)=\mathrm{e}^{\frac{c}{a}z}u(x,y,t)$, 转化为 $v(x,y,z,t)$ 的定解问题.)

2.3　一维波动方程的混合问题　分离变量法

分离变量法又称为驻波法和 Fourier 方法，它是求解偏微分方程各种混合问题和边值问题的一个重要方法，其基本思想是把解偏微分方程问题转化为解常微分方程问题，它不仅适用于波动方程，而且也适用于热传导方程、 Laplace 方程，以及某些形式更复杂的方程或方程组. 在这一节将以两端固定的一维弦振动方程的混合问题为模型，阐述分离变量法的解题过程、理论基础和它的物理背景.

2.3.1 问题的化简

对于一维波动方程的混合问题

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), \quad 0<x<l,\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l,\\ u(0,t)=\mu_1(t), \quad u(l,t)=\mu_2(t), \quad t\geqslant 0\end{cases}$$

的求解，利用叠加原理，可以分别求解下面的三个混合问题

$$(\mathrm{II})\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad 0<x<l,\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x), 0\leqslant x\leqslant l,\\ u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0, \quad t\geqslant 0;\end{cases}$$

$$(\mathrm{III})\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), \quad 0<x<l,\ t>0,\\ u(x,0)=0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \quad 0\leqslant x\leqslant l,\\ u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0, \quad t\geqslant 0;\end{cases}$$

$$(\mathrm{IV})\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad 0<x<l,\ t>0,\\ u(x,0)=0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \quad 0\leqslant x\leqslant l,\\ u(0,t)=\mu_1(t), \quad u(l,t)=\mu_2(t), \quad t\geqslant 0.\end{cases}$$

如果 u_1、u_2、u_3 分别为混合问题 (Ⅱ)、(Ⅲ)、(Ⅳ) 的解，则

$$u=u_1+u_2+u_3$$

为混合问题 (Ⅰ) 的解.

类似于第 1 节中的讨论，关键是求解混合问题 (Ⅱ), 即两端固定的有界弦自由振动的混合问题，因为在下面可以看到，混合问题 (Ⅲ) 和 (Ⅳ) 都可以归结为混合问题 (Ⅱ) 来求解.

2.3.2 分离变量法

对于定解问题 (Ⅱ), 即齐次方程及齐次边界条件的混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad 0<x<l,\ t>0, & (2.3.1)\\ u(x,0)=\varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l, & (2.3.2)\\ u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0, \quad t\geqslant 0, & (2.3.3)\end{cases}$$

我们先利用分离变量法求解上述定解问题的形式解.

假设方程 (2.3.1) 存在关于 x 和 t 变量可分离形式的非零解，即

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

其中 $X(x)$ 与 $T(t)$ 为待定函数. 此时，如果利用定解条件能求出函数 $X(x)$ 与 $T(t)$，那么我们就找到了上述定解问题的形式解.

下面利用定解条件来求函数 $X(x)$ 与 $T(t)$，求解过程分为以下三步：

第一步，求方程 (2.3.1) 满足边界条件 (2.3.3) 的变量可分离形式的非零解.

将 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 代入方程 (2.3.1)，得

$$X(x)T''(t) - a^2X''(x)T(t) = 0,$$

并对于使 $X(x)T(t) \neq 0$ 的点 (x,t)，分离变量得

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2T(t)}.$$

由于上式左端是关于 x 的函数，右端是关于 t 的函数，故为使上式成立，两端必然等于某个常数. 设这个常数为 $-\lambda$，则有

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2T(t)} \equiv -\lambda,$$

即

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0,$$
$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

根据边界条件得

$$X(0)T(t) = X(l)T(t) = 0,$$

又由 $u(x,t)$ 是非零解可知，$T(t) \not\equiv 0$，则有

$$X(0) = X(l) = 0.$$

这样对于任意一个具有变量分离形式的非零解 $u = X(x)T(t)$，其 $T(t)$ 应满足

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \tag{2.3.4}$$

而 $X(x)$ 应是齐次边值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < l, \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \tag{2.3.5}$$

的解. 为此引入特征值和特征函数的定义.

定义 2.3.1 使常微分方程齐次边值问题 (2.3.5) 具有非零解的那些 λ 值，称为这个边值问题的**特征值**或**固有值**; 对应的非零解称为对应于这个特征值的**特征函数**或**固有函数**; 寻求常微分方程齐次边值问题 (2.3.5) 的所有特征值和特征函数的问题称为特征值问题或 Sturm–Liouville 问题.

第二步，求特征值问题 (2.3.5) 的非零解，及相应 $T(t)$ 的表达式.

由于方程 (2.3.5) 的通解形式随 λ 的取值而定，以下分三种情况讨论.

1. 当 $\lambda<0$ 时，方程 (2.3.5) 的通解为

$$X(x)=c_1\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

由边界条件得到关于 c_1 和 c_2 的线性方程组

$$\begin{cases}X(0)=c_1+c_2=0,\\ X(l)=c_1\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}l}+c_2\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}l}=0.\end{cases}$$

由于该线性方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ \mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}l} & \mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}l}\end{vmatrix}=\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}l}-\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}l}\neq 0,$$

故解得 $c_1=c_2=0$, 即 $X(x)\equiv 0$, 此时特征值问题 (2.3.5) 没有非零解.

2. 当 $\lambda=0$ 时，方程 (2.3.5) 成为

$$X''(x)=0,$$

其通解为

$$X(x)=c_1+c_2x,$$

由边界条件得到

$$\begin{cases}X(0)=c_1=0,\\ X(l)=c_1+c_2l=0,\end{cases}$$

解得 $c_1=c_2=0$, 即 $X(x)\equiv 0$, 此时特征值问题 (2.3.5) 没有非零解.

3. 当 $\lambda>0$ 时，方程 (2.3.5) 的通解为

$$X(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x,$$

由边界条件可得

$$\begin{cases}X(0)=c_2=0,\\ X(l)=c_1\cos\sqrt{\lambda}l+c_2\sin\sqrt{\lambda}l=0,\end{cases}$$

解得 $c_1=0,\ c_2\sin\sqrt{\lambda}\,l=0$.

要使 $X(x)$ 不恒为零，必须要求 $c_2\neq 0$, 故有

$$\sin\sqrt{\lambda}l=0,$$

于是解得

$$\lambda=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad n=1,2,\cdots, \tag{2.3.6}$$

相应的特征函数为

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad n=1,2,\cdots, \tag{2.3.7}$$

再将 (2.3.6) 代入到 (2.3.4) 中，求得

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t,\quad n=1,2,\cdots, \tag{2.3.8}$$

从而方程 (2.3.1) 的全体非零解 (一列变量分量形式的特解) 为

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

其中 A_n, B_n $(n=1,2,\cdots)$ 为待定系数.

第三步，利用叠加原理求定解问题 (2.3.1)—(2.3.3) 的形式解.

把所有的特解 $u_n(x,t)$, $n=1,2,\cdots$ 叠加起来，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

如果上述级数在区域 $\overline{Q}=\{(x,t)\mid 0\leqslant x\leqslant l,\ t\geqslant 0\}$ 上收敛，且关于变量 x 和 t 可逐项微分两次，由叠加原理可知，函数

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{2.3.9}$$

满足方程 (2.3.1) 及边界条件 (2.3.3).

为使函数 $u(x,t)$ 满足初始条件 (2.3.2), 选取系数 A_n、B_n, 使得

$$u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$u_t(x,0)=\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}B_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

根据 Fourier 级数理论， A_n 和 $\frac{n\pi a}{l}B_n$ 分别是 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的 Fourier 正弦展开式的系数，从而

$$\begin{cases}A_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi,\quad n=1,2,\cdots,\\[2ex] B_n=\dfrac{2}{n\pi a}\displaystyle\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi,\quad n=1,2,\cdots.\end{cases} \tag{2.3.10}$$

将其代入 (2.3.9), 就得到混合问题 (2.3.1)—(2.3.3) 的一个级数解，它只是定解问题 (2.3.1)—(2.3.3) 的一个形式解.

为保证由 (2.3.9) 及 (2.3.10) 确定的定解问题 (2.3.1)—(2.3.3) 的形式解就是古典解，初值函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 应满足什么样的定解条件？

2.3.3 解的存在性

定理 2.3.1 (解的存在性)

若 $\varphi(x)\in C^3[0,l]$、$\psi(x)\in C^2[0,l]$ 以及 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ 在区域 $\overline{Q}$ 的角点 $(0,0)$、$(l,0)$ 处满足相容性条件

$$\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=\psi(0)=\psi(l)=0,$$

则由表达式 (2.3.9) 及 (2.3.10) 所确定的函数 $u(x,t)$ 是定解问题 (2.3.1)—(2.3.3) 的属于 $C^2(\overline{Q})$ 的解，其中 $\overline{Q}=\{(x,t)\mid 0\leqslant x\leqslant l,\ t\geqslant 0\}$.

证明 令

$$u_k(x,t)=\left(\varphi_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+\frac{l}{k\pi a}\psi_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x,\quad k=1,2,\cdots,$$

其中

$$\varphi_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi,,\quad k=1,2,\cdots,$$
$$\psi_k=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi,\quad k=1,2,\cdots.$$

将 $u_k(x,t)$ 关于 x 及 t 求偏导数得

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}=\frac{k\pi a}{l}\left(-\varphi_k\sin\frac{k\pi a}{l}t+\frac{l}{k\pi a}\psi_k\cos\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x,$$
$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}=-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2\left(\varphi_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+\frac{l}{k\pi a}\psi_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x,$$
$$\frac{\partial u_k}{\partial x}=\frac{k\pi}{l}\left(\varphi_k\sin\frac{k\pi a}{l}t+\frac{l}{k\pi a}\psi_k\cos\frac{k\pi a}{l}t\right)\cos\frac{k\pi}{l}x,$$
$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}=-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\left(\varphi_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+\frac{l}{k\pi a}\psi_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

于是

$$|u_k(x,t)|\leqslant|\varphi_k|+\frac{l}{a\pi}\frac{|\psi_k|}{k}\leqslant M(|\varphi_k|+|\psi_k|),$$
$$\left|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right|\leqslant\frac{a\pi}{l}\left(k|\varphi_k|+\frac{l}{a\pi}|\psi_k|\right)\leqslant M(k|\varphi_k|+|\psi_k|),$$
$$\left|\frac{\partial u_k}{\partial x}\right|\leqslant\frac{\pi}{l}\left(k|\varphi_k|+\frac{l}{a\pi}|\psi_k|\right)\leqslant M(k|\varphi_k|+|\psi_k|),$$
$$\left|\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}\right|\leqslant\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2\left(k^2|\varphi_k|+\frac{l}{a\pi}k|\psi_k|\right)\leqslant M(k^2|\varphi_k|+k|\psi_k|),$$
$$\left|\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}\right|\leqslant\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\left(k^2|\varphi_k|+\frac{l}{a\pi}k|\psi_k|\right)\leqslant M(k^2|\varphi_k|+k|\psi_k|),$$

其中 $M=\max\left\{1,\ \frac{l}{a\pi},\ \frac{a\pi}{l},\ \frac{a^2\pi^2}{l^2},\ \frac{\pi}{l},\ \frac{\pi^2}{l^2},\ \frac{\pi}{al},\ \frac{1}{a}\right\}$.

另一方面，由 $\varphi(x) \in C^3[0,l]$、$\psi(x) \in C^2[0,l]$, 并根据相容性条件及 Fourier 级数展开理论可知，级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2|\varphi_k|$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k|\psi_k|$ 均收敛，故由比较判别法可知，级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k|,\quad \sum_{k=1}^{\infty}k|\varphi_k|,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\psi_k|}{k},\quad \sum_{k=1}^{\infty}|\psi_k|$$

也都收敛，从而由上述估计式可知，级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x,t),\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial u_k}{\partial t},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial u_k}{\partial x},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}$$

都在 $\overline{Q} = \{(x,t) \mid 0 \leqslant x \leqslant l,\ t \geqslant 0\}$ 上绝对一致收敛.

综上可知，级数

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_k\cos\frac{k\pi a}{l}t + \frac{l}{k\pi a}\psi_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

的和函数属于 $C^2(\overline{Q})$, 且 $u(x,t)$ 关于 x 和 t 可逐项微分两次，并由

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}$$

可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{\infty}a^2\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

即 $u(x,t)$ 适合方程 (2.3.1), 由

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\sin\frac{k\pi}{l}x,\quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\psi_k\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

$$u_k(x,t) = \left(\varphi_k\cos\frac{k\pi a}{l}t + \frac{l}{k\pi a}\psi_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

可知，对 $\forall\, x \in [0,l]$, 有

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\lim_{t\to 0}u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}u_k(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\sin\frac{k\pi}{l}x = \varphi(x),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty}\lim_{t\to 0}\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}\left.\frac{\partial u_k}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty}\psi_k\sin\frac{k\pi}{l}x = \psi(x).$$

即 $u(x,t)$ 适合定解条件 (2.3.2) 及 (2.3.3). ∎

最后我们指出，用分离变量法解齐次方程齐次边值问题可以分成四步:

第一步，分离变量，将偏微分方程问题化为常微分方程问题;

第二步，解特征值问题，求偏微分方程的特解;

第三步，将所有的特解叠加起来，得到定解问题的形式解;

第四步，当定解数据满足一定条件时，验证形式解确实是解.

对于定解问题 (2.3.1)—(2.3.3) 也可以采用对称延拓法求解.

首先将初值 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 对称延拓成奇函数 $\Phi_1(x)$, $\Psi_1(x)$, 即

$$\Phi_1(x)=\begin{cases}-\varphi(-x), & -l<x\leqslant 0,\\ \varphi(x), & 0<x\leqslant l,\end{cases}\qquad \Psi_1(x)=\begin{cases}-\psi(-x), & -l<x\leqslant 0,\\ \psi(x), & 0<x\leqslant l,\end{cases}$$

再将 $\Phi_1(x)$, $\Psi_1(x)$ 延拓成以 $2l$ 为周期的周期函数 $\Phi(x)$, $\Psi(x)$, 即

$$\Phi(x)=\Phi_1(x+2kl),\quad 2kl-l\leqslant x\leqslant 2kl+l,\ k\in\mathbb{Z},$$

$$\Psi(x)=\Psi_1(x+2kl),\quad 2kl-l\leqslant x\leqslant 2kl+l,\ k\in\mathbb{Z}.$$

以 $\Phi(x)$、$\Psi(x)$ 为初值, 由 D'Alembert 公式可得初值问题的解为

$$U(x,t)=\frac{1}{2}\big[\Phi(x+at)+\Phi(x-at)\big]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

可以证明 $U(x,t)$ 关于 x 既是奇函数也是周期为 $2l$ 的函数, 所以在区域 $\overline{Q}$ 上, 令

$$u(x,t)=U(x,t),$$

那么由此得到的 $u(x,t)$ 必然满足混合问题 (2.3.1)—(2.3.3).

从这个表达式可以看出, 定理 2.3.1 中关于 φ 和 ψ 的光滑性条件要求可以减弱为 $\varphi(x)\in C^2[0,l]$, $\psi(x)\in C^1[0,l]$.

例 2.3.1 求两端自由的弦振动方程混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & 0<x<l,\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x),\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x), & 0\leqslant x\leqslant l,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0, & t\geqslant 0\end{cases}$$

的形式解.

解 第一步, 设该方程具有变量分离形式的非零解

$$u(x,t)=X(x)T(t),$$

将其代入方程中, 并利用边界条件可知, $T(t)$ 应满足方程

$$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0,\quad t>0, \tag{2.3.12}$$

而 $X(x)$ 应满足特征值问题

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<l,\\ X'(0)=X'(l)=0.\end{cases} \tag{2.3.13}$$

第二步, 解特征值问题 (2.3.13).

当 $\lambda<0$ 时, 类似于定解问题 (Ⅱ) 的推导, 特征值问题 (2.3.13) 没有非零解.

当 $\lambda=0$ 时，方程 (2.3.13) 的通解为

$$X(x)=c_1+c_2x,$$

由边界条件得到

$$X'(0)=X'(l)=c_2=0,$$

从而 $X_0(x)\equiv 1$ 为特征值问题 (2.3.13) 的非零解.

当 $\lambda>0$ 时，类似于定解问题 (Ⅱ) 的推导，可得特征值为

$$\lambda=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad n=1,2,\cdots,$$

相应的特征函数为

$$X_n(x)=\cos\frac{n\pi}{l}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

把 $\lambda=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 代入 (2.3.12), 得

$$T_0(t)=C_0+D_0t,\ \ T_n(t)=C_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+D_n\sin\frac{n\pi a}{l}t,\quad n=1,2,\cdots.$$

其中 C_n, D_n $(n=0,1,2,\cdots)$ 为待定系数.

综上可得，原方程的全体非零特解为

$$u_0(x,t)=C_0+D_0t,$$

$$u_n(x,t)=\left(C_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+D_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\cos\frac{n\pi}{l}x,\quad n=1,2,\cdots,$$

这里 C_n, D_n $(n=0,1,2,\cdots)$ 为待定系数.

第三步，把所有的 $u_n(x,t)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 叠加起来，得

$$u(x,t)=C_0+D_0t+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+D_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\cos\frac{n\pi}{l}x. \tag{2.3.14}$$

为使函数 $u(x,t)$ 满足初始条件，系数 C_n, D_n 应满足

$$\varphi(x)=u|_{t=0}=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos\frac{n\pi}{l}x,$$

$$\psi(x)=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=D_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}D_n\cos\frac{n\pi}{l}x,$$

于是解得

$$C_0=\frac{1}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi,\quad C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi,\quad n=1,2,\cdots,$$

$$D_0=\frac{1}{l}\int_0^l\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi,\quad D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi,\quad n=1,2,\cdots.$$

将其代入式 (2.3.14), 可得此混合问题的形式解.

类似定理 2.3.1 的证明，如果 $\varphi(x)\in C^3[0,l]$、$\psi(x)\in C^2[0,l]$, 且适合相容性条件 $\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=\psi(0)=\psi(l)=0$, 则上面求得的函数 $u(x,t)$ 是该混合问题属于 $C^2(\overline{Q})$ 的解，其中

$$Q=\{(x,t)\mid 0<x<l,\ t>0\}.$$

例 2.3.2 求一端固定、一端自由的弦振动方程混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & 0<x<l,\ t>0,\\ u(x,0)=\dfrac{h}{l}x,\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0, & 0\leqslant x\leqslant l,\\ u(0,t)=0,\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0, & t\geqslant 0\end{cases}$$

的形式解.

解 第一步，设此方程具有分离变量形式的非零解

$$u(x,t)=X(x)T(t).$$

与例 2.3.1 完全类似地可得到 $T(t)$ 应满足的方程为

$$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0,\quad t>0,$$

而 $X(x)$ 应满足的特征值问题为

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<l,\\ X'(l)=X(0)=0.\end{cases}$$

第二步，解上面的特征值问题，求出全体特征值和特征函数及相应的 $T(t)$.

类似于前面定解问题 II 的推导可知，只有当 $\lambda>0$ 时特征方程有非零解，此时特征方程的通解为

$$X(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x,$$

并由 $X(x)$ 的边界条件可得

$$X(0)=c_1=0,\quad X'(l)=\sqrt{\lambda}c_2\cos\sqrt{\lambda}l-\sqrt{\lambda}c_1\sin\sqrt{\lambda}l=0.$$

从而 $c_1=0$, $c_2\cos\sqrt{\lambda}l=0$.

因为 $X(x)$ 是非零函数，所以必有 $c_2\neq 0$, $\cos\sqrt{\lambda}l=0$, 即

$$\lambda_n=\left[\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2,\quad n=1,2,\cdots,$$

于是相应的特征函数为

$$X_n(x)=\sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

将 $\lambda_n = \left[\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 代入关于 $T(t)$ 的方程中，得

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{(2n-1)a\pi}{2l}t + B_n \sin\frac{(2n-1)a\pi}{2l}t, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

其中 A_n，B_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 为待定系数.

综上可知，此定解问题的非零特解为

$$u_n(x,t) = \left[A_n \cos\frac{(2n-1)a\pi}{2l}t + B_n \sin\frac{(2n-1)a\pi}{2l}t\right]\sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x,$$

其中 A_n，B_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 是待定系数.

第三步，把所有的 $u_n(x,t)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 叠加起来，得

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\frac{(2n-1)a\pi}{2l}t + B_n \sin\frac{(2n-1)a\pi}{2l}t\right]\sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x.$$

由初始条件可知，系数 A_n、B_n 应满足

$$u|_{t=0} = \frac{h}{l}x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)a\pi}{2l}B_n \sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x,$$

于是解得

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{h}{l}\xi \sin\frac{(2n-1)\pi}{l}\xi \mathrm{d}\xi = \frac{(-1)^{n+1}8h}{(2n-1)^2\pi^2}, \quad B_n = 0, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

综上可知，所求定解问题的形式解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}8h}{(2n-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2n-1)a\pi}{2l}t\sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x.$$

2.3.4 解的物理意义

对于两端固定的有界弦的自由振动的物理模型，可归结为混合问题 (2.3.1)(2.3.3)，它的形式解可以由级数 (2.3.9) 表示，而它的通项可写成如下形式

$$\begin{aligned} u_k(x,t) &= \left(A_k \sin\frac{k\pi a}{l}t + B_k \cos\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x \\ &= N_k \sin(\omega_k t + \delta_k)\sin\frac{k\pi}{l}x, \end{aligned}$$

其中 $N_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$，$\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$，$\delta_k = \arctan\frac{B_k}{A_k}$.

形如 $N_k \sin(\omega_k t + \delta_k)$ 的函数表示一种简谐振动，它的圆频率为 ω_k，初相位为 δ_k，振幅为 N_k，因此

$$u_k(x,t) = N_k \sin\frac{k\pi}{l}x \sin(\omega_k t + \delta_k)$$

代表这样的振动波：在所考察的弦上的每一点以同一圆频率作简谐振动，其相位相同；振幅 $\left|N_k \sin \frac{k\pi}{l} x\right|$ 则与每一点的位置 x 有关.

在使 $\sin \frac{k\pi}{l} x = \pm 1$ 的点

$$x = \frac{2m+1}{2k} l \quad (m = 0, 1, \cdots, k-1)$$

处，振幅 $\left|N_k \sin \frac{k\pi}{l} x\right| = N_k$ 达到其最大值，这些点称为振动波 $u_k(x,t)$ 的腹点，或称为波腹；而在使 $\sin \frac{k\pi}{l} x = 0$ 的点

$$x = \frac{m}{k} l \quad (m = 0, 1, 2, \cdots, k)$$

处振幅 $\left|N_k \sin \frac{k\pi}{l} x\right| = 0$, 这些点称为振动波 $u_k(x,t)$ 的节点，或称为波节. 这种具有不随时间 t 变化的节点和腹点的波，在物理学上称为驻波. 还可看出，驻波的振幅 $\left|N_k \sin \frac{k\pi}{l} x\right|$ 随弦上的点 x 而变化，但圆频率 w_k(当 k 固定时) 只与弦本身的内在性质 (如弦长 l, 张力 T, 质量密度 ρ) 有关，因此称为弦的固有频率. 对固定的 k. 振幅和相位由初始条件决定，而圆频率与初始条件无关.

因此，从物理学上看来，弦的振动波可看作是由一系列圆频率不同、相位不同、振幅不同的驻波的叠加，即

$$u(x,t) = \sum_{k=i}^{\infty} N_k \sin(\omega_k t + \delta_k) \sin \frac{k\pi}{l} x,$$

所以分离变量法又称为驻波法.

2.3.5 非齐次方程的混合问题 齐次化原理

考虑非齐次方程、齐次边界条件的情形. 我们用特征函数展开法来解两端固定的弦在外力作用下的振动问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.3.15}$$

与上一节中齐次波动方程初值问题的情形类似，我们有如下定理：

定理 2.3.2 (齐次化原理) 如果 $W(x,t;\tau)$ 是混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l,\ t > \tau, \\ W(x,\tau;\tau) = 0, \quad \left.\dfrac{\partial W}{\partial t}\right|_{t=\tau} = f(x,\tau), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ W(0,t;\tau) = 0, \quad W(l,t;\tau) = 0, \quad t \geqslant \tau \end{cases}$$

的解，则函数

$$u(x,t)=\int_0^t W(x,t;\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

是混合问题 (2.3.15) 的解，其中 $\tau\geqslant 0$ 为参数，$f(x,\tau)\in C^2$ 且 $f(0,\tau)=f(l,\tau)=0$.

定理 2.3.2 的证明略，下面仅推导混合问题 (2.3.15) 的解的表达式.

令 $t_1=t-\tau$, 则 $\widetilde{W}(x,t_1)=W(x,t;\tau)$ 是混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\widetilde{W}}{\partial t_1^2}-a^2\dfrac{\partial^2\widetilde{W}}{\partial x^2}=0, & 0<x<l,\ t_1>0,\\ \widetilde{W}(x,0)=0,\quad \left.\dfrac{\partial\widetilde{W}}{\partial t_1}\right|_{t_1=0}=f(x,\tau), & 0\leqslant x\leqslant l,\\ \widetilde{W}(0,t_1)=0,\quad \widetilde{W}(l,t_1)=0, & t_1\geqslant 0\end{cases}$$

的解. 因为 $f(x,\tau)\in C^2$ 且 $f(0,\tau)=f(l,\tau)=0$, 由定理 2.3.2 可知，该混合问题的解存在，且可表示为

$$\widetilde{W}(x,t_1)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}t_1\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

因此

$$W(x,t;\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中

$$B_n(\tau)=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l f(\xi,\tau)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi,\quad n=1,2,\cdots.$$

利用齐次化原理可得混合问题 (2.3.15) 的解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t B_n(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

在 $f(x,t)\in C^2$ 且 $f(0,t)=f(l,t)=0$ 的假设下，可以直接验证此级数确实是混合问题 (2.3.15) 的解.

例 2.3.3 求非齐次方程混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=Ax\sin\omega t, & 0<x<l,\ t>0,\\ u(x,0)=0,\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0, & 0\leqslant x\leqslant l,\\ u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0, & t\geqslant 0\end{cases}$$

的形式解，其中 $\omega>0$.

解 由上面的公式可知，所求混合问题的形式解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t B_n(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

下面计算 $B_n(\tau)$.

$$B_n(\tau) = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l A\xi \sin\omega\tau \sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi$$
$$= \frac{2A\sin\omega\tau}{n\pi a}\left[-\frac{l}{n\pi}\xi\cos\frac{n\pi}{l}\xi\Big|_0^l + \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\sin\frac{l}{n\pi}\Big|_0^l\right]$$
$$= (-1)^{n+1}\frac{2Al^2}{an^2\pi^2}\sin\omega\tau.$$

引入记号

$$M_n = (-1)^{n+1}\frac{2Al^2}{an^2\pi^2},\quad B_n^* = \int_0^t B_n(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau,$$

则当 $n \neq \dfrac{l\omega}{a\pi}$ 时，有

$$B_n^* = M_n\int_0^t \sin\omega\tau\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$= \frac{M_n}{2}\int_0^t\left[\cos\left(\frac{n\pi a + l\omega}{l}\tau - \frac{n\pi a}{l}t\right) - \cos\left(\frac{n\pi a - l\omega}{l}\tau - \frac{n\pi a}{l}t\right)\right]\mathrm{d}\tau$$
$$= \frac{M_n l}{l^2\omega^2 - a^2n^2\pi^2}\left(l\omega\sin\frac{n\pi a}{l}t - n\pi a\sin\omega t\right)$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}2Al^3}{an^2\pi^2(l^2\omega^2 - a^2n^2\pi^2)}\left(l\omega\sin\frac{n\pi a}{l}t - n\pi a\sin\omega t\right),$$

当 $n = \dfrac{l\omega}{a\pi}$ 时，有

$$B_n^* = M_n\int_0^t \sin\omega\tau\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$= \frac{M_n}{2}\int_0^t\left[\cos\left(\frac{n\pi a + l\omega}{l}\tau - \frac{n\pi a}{l}t\right) - \cos\left(\frac{n\pi a - l\omega}{l}\tau - \frac{n\pi a}{l}t\right)\right]\mathrm{d}\tau$$
$$= \frac{M_n}{2\omega}\left(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t\right)$$
$$= (-1)^{n+1}\frac{Al^2}{an^2\pi^2\omega}\left(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t\right),$$

于是当 $n \neq \dfrac{l\omega}{a\pi}$ 时，所求混合问题的形式解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2Al^3}{an^2\pi^2(l^2\omega^2 - a^2n^2\pi^2)}\left(l\omega\sin\frac{n\pi a}{l}t - n\pi a\sin\omega t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

当 $n = \dfrac{l\omega}{a\pi}$ 时，所求混合问题的形式解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{Al^2}{an^2\pi^2\omega}\left(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

2.3.6 非齐次边值条件的混合问题

对于非齐次边值条件的混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad t \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.3.16}$$

的求解, 只要通过未知函数的适当变换把边界条件化为齐次的, 就可以用前面的方法来求解.

首先作函数代换

$$U(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)],$$

显然 $U(x,t)$ 满足 (2.3.16) 的边界条件.

再作函数代换

$$V(x,t) = u(x,t) - U(x,t),$$

如果 $\mu_1(t) \in C^2$ 及 $\mu_2(t) \in C^2$ 且 $u(x,t)$ 为非齐次边界条件的混合问题 (2.3.16) 的解, 则 $V(x,t)$ 满足下述混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \widetilde{f}(x,t), \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ V(x,0) = \widetilde{\varphi}(x), \quad \left.\dfrac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0} = \widetilde{\psi}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ V(0,t) = 0, \quad V(l,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(x,t) &= -\mu_1''(t) - \frac{x}{l}[\mu_2''(t) - \mu_1''(t)], \\ \widetilde{\varphi}(x) &= -\mu_1(0) - \frac{x}{l}[\mu_2(0) - \mu_1(0)], \\ \widetilde{\psi}(x) &= -\mu_1'(0) - \frac{x}{l}[\mu_2'(0) - \mu_1'(0)]. \end{aligned}$$

根据齐次化原理解出 $V(x,t)$, 从而非齐次边界条件的混合问题 (2.3.16) 的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= U(x,t) + V(x,t) \\ &= \mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)] \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\widetilde{A_n}\cos\frac{n\pi a}{l}t + \widetilde{B_n}\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t \widetilde{B_n^*}(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\sin\frac{n\pi}{l}x, \end{aligned}$$

其中

$$\widetilde{A_n} = \frac{2}{l}\int_0^l \widetilde{\varphi}(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi,\quad n=1,2,\cdots,$$

$$\widetilde{B_n} = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \widetilde{\psi}(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi,\quad n=1,2,\cdots,$$

$$\widetilde{B_n^*}(\tau) = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \widetilde{f}(\xi,\tau)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi,\quad n=1,2,\cdots.$$

综上所述，对于混合问题 (Ⅱ)、(Ⅲ) 及 (Ⅳ) 均可用分离变量法求解，且其解的表达式均为三角级数的形式，利用叠加原理可得混合问题 (Ⅰ) 的解.

例 2.3.4 求非齐次边界条件的混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0<x<l,\ t>0,\\ u(x,0)=0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0, & 0\leqslant x\leqslant l,\\ u(0,t)=0, \quad u(l,t)=A\cos\omega t, & t\geqslant 0\end{cases}$$

的形式解.

解 设 $u(x,t)$ 为该混合问题的解. 作辅助函数

$$V(x,t) = u(x,t) - \frac{x}{l}A\cos\omega t,$$

代入方程得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \dfrac{A\omega^2}{l}x\cos\omega t, & 0<x<l,\ t>0,\\ V(x,0)=-\dfrac{A}{l}x, \quad \dfrac{\partial V}{\partial t}\Big|_{t=0}=0, & 0\leqslant x\leqslant l,\\ V(0,t)=0, \quad V(l,t)=0, & t\geqslant 0,\end{cases}$$

从而

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{A}_n\cos\frac{n\pi a}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x + \sum_{n=1}^{\infty}B_n^*\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中

$$\widetilde{A}_n = \frac{2}{l}\int_0^l\left(-\frac{A}{l}\right)\xi\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi,\quad n=1,2,\cdots,$$

$$\widetilde{B}_n^*(\tau) = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l\frac{A\omega^2}{l}\xi\cos\omega\tau\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi,\quad n=1,2,\cdots,$$

$$B_n^* = \int_0^t\widetilde{B}_n^*(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau,\quad n=1,2,\cdots.$$

下面计算 $\widetilde{A}_n$, $\widetilde{B}_n^*(\tau)$ 及 B_n^*.

事实上，由

$$\int_0^l \xi \sin \frac{n\pi}{l} \xi \, \mathrm{d}\xi = \left[-\frac{l}{n\pi}\xi \cos \frac{n\pi}{l}\xi + \frac{l^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{l}\xi \right]\Big|_0^l = (-1)^{n+1} \frac{l^2}{n\pi}$$

可得

$$\widetilde{A}_n = -\frac{2A}{l^2} \int_0^l \xi \sin \frac{n\pi}{l}\xi \, \mathrm{d}\xi = \left[-\frac{2A}{l^2} \right] \left[(-1)^{n+1} \frac{l^2}{n\pi} \right] = (-1)^2 \frac{2A}{n\pi},$$

$$\begin{aligned} \widetilde{B}_n^*(\tau) &= \frac{2A\omega^2}{anl\pi} \cos \omega\tau \int_0^l \xi \sin \frac{n\pi}{l}\xi \, \mathrm{d}\xi \\ &= \left[\frac{2A\omega^2}{anl\pi} \cos \omega\tau \right] \left[(-1)^{n+1} \frac{l^2}{n\pi} \right] = (-1)^{n+1} \frac{2Al\omega^2}{an^2\pi^2} \cos \omega\tau. \end{aligned}$$

引入记号

$$M_n = (-1)^{n+1} \frac{2Al\omega^2}{an^2\pi^2},$$

则

$$\begin{aligned} B_n^* &= \int_0^t \widetilde{B}_n^*(\tau) \sin \frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau = M_n \int_0^t \cos \omega\tau \sin \frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{M_n}{2} \int_0^t \left[\sin \left(\frac{n\pi a}{l}t - \frac{n\pi a - l\omega}{l}\tau \right) + \sin \left(\frac{n\pi a}{l}t - \frac{n\pi a + l\omega}{l}\tau \right) \right] \mathrm{d}\tau \\ &= \begin{cases} (-1)^{n+1} \dfrac{2Al^2\omega^2}{n\pi(l^2\omega^2 - a^2n^2\pi^2)} \left[\cos \omega t - \cos \dfrac{n\pi a}{l}t \right], & n \neq \dfrac{l\omega}{a\pi}, \\ (-1)^{n+1} \dfrac{Al\omega^2}{an^2\pi^2} t \sin \omega t, & n = \dfrac{l\omega}{a\pi}. \end{cases} \end{aligned}$$

综上可知，混合问题 (2.3.16) 的形式解为

$$u(x,t) = \frac{x}{l} A \cos \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{2A}{n\pi} \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n^* \right] \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

对混合问题 (Ⅲ) 通常可以采用以下解题步骤:

第一步，把变量分离形式的解代入相应的齐次方程和齐次边界条件，可得到相应的特征值问题，并求出其全部特征值 $\left\{\frac{n\pi}{l}\right\}$ 和特征函数 $\left\{ \sin \frac{n\pi}{l} x \right\}$.

第二步，把 $u(x,t)$ 和方程的非齐次项 $f(x,t)$ 及初值 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ 都按特征函数系展开

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

其中 $f_n(t)$、φ_n、ψ_n 分别是 $f(x,t)$、$\varphi(x)$、$\psi(x)$ 的 Fourier 系数，$T_n(t)$ 是 $u(x,t)$ 的 Fourier 系数，这里 $T_n(t)$ 还是未知的.

将它们代入混合问题 (Ⅲ) 的方程和初始条件. 由于特征函数系 $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{l}x\right\}$ 是完备的，得到的 $T_n(t)$ 适合微分方程和初始条件

$$\begin{cases} T_n''(t)+\left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)=f_n(t), & t>0,\\ T_n(0)=\varphi_n, \quad T_n'(0)=\psi_n. \end{cases}$$

第三步，解上面的初值问题可得

$$T_n(t)=\varphi_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+\frac{l}{n\pi a}\psi_n\sin\frac{n\pi a}{l}t+\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau,$$

将 $T_n(t)$ 代入解 $u(x,t)$ 的展开式就得到混合问题 (Ⅲ) 的解的表达式.

如果要求 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ 和 $f(x,t)$ 具有一定的光滑性和满足某些相容性条件，那么所得到的形式解就是属于 $C^2(\overline{Q})$ 的解.

习题 2.3

2.3.1 用分离变量法求下列定解问题的解:

(1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad 0<x<l,\ t>0,\\ u(x,0)=\sin\dfrac{3\pi x}{l}, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=x(l-x), \quad 0\leqslant x\leqslant l,\\ u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0, \quad t\geqslant 0; \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad 0<x<l,\ t>0,\\ u(x,0)=x^2-2lx, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \quad 0\leqslant x\leqslant l.\\ u(0,t)=0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0, \quad t\geqslant 0; \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\sin\dfrac{2\pi x}{l}\sin\dfrac{2\pi at}{l}, \quad 0<x<l,\ t>0,\\ u(x,0)=0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \quad 0\leqslant x\leqslant l,\\ u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0, \quad t\geqslant 0; \end{cases}$$

(4) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad 0<x<l,\ t>0,\\ u(x,0)=\begin{cases} \dfrac{h}{b}x, & 0\leqslant x\leqslant b,\\ -\dfrac{h}{1-b}(x-b)+h, & b<x\leqslant 1, \end{cases}\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \quad 0\leqslant x\leqslant 1,\\ u(0,t)=0, \quad u(1,t)=0, \quad t\geqslant 0. \end{cases}$$

2.3.2 设长为 l 的弹簧其一端固定，另一端在外力作用下作周期振动，此时定解问题归结为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u(0,t) = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{t=0} = A\sin wt, & t \geqslant 0, \end{cases}$$

试求解此问题.

2.4　半无界弦的混合问题

考虑一端固定的半无界弦的振动，其定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & (x,t) \in Q^+, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), & x \geqslant 0, \\ u(0,t) = 0, & t \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.4.1}$$

求解半无界弦的混合问题 (2.4.1) 的基本思路是适当地延拓 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 的定义到整个实轴上，延拓 $u(x,t)$ 的定义到半平面 $\{(x,t) \mid x \in \mathbb{R},\ t > 0\}$，把半无界弦的混合问题转化为在整个上半平面的初值问题，然后用 D'Alembert 公式求解，再把得到的解限制到区域 $\{(x,t) \mid x > 0,\ t > 0\}$ 上就得到半无界问题的解.

一般情况下，较简单的非平凡延拓当然是奇延拓或偶延拓. 由于方程中 $u(x,t)$ 关于 x 的导数项都是偶数阶，不论 $u(x,t)$ 关于 x 作奇延拓或偶延拓，只要 $u(x,t)$ 在 $\{(x,t) \mid x > 0,\ t > 0\}$ 上满足方程，它在 $\{(x,t) \mid x < 0,\ t > 0\}$ 上同样满足方程.

显然作为 $u(x,t)$ 的初值，$\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 关于 x 的奇偶性必须与 $u(x,t)$ 一致，关键就在于连接处 $u(0,t)$ 的值. 如果 $u(x,t)$ 关于 x 要作奇延拓，则需 $u(0,t) = 0$; 如果 $u(x,t)$ 关于 x 要作偶延拓，则需 $u_x(0,t) = 0$.

根据上述分析，在这个定解问题中需对初值函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 作奇延拓，故定义函数 $\widetilde{\varphi}(x)$ 及 $\widetilde{\psi}(x)$ 如下：

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geqslant 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0; \end{cases} \qquad \widetilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geqslant 0, \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

显然函数 $\widetilde{\varphi}(x)$ 及 $\widetilde{\psi}(x)$ 都是 x 的奇函数.

记 $\widetilde{u}(x,t)$ 为 $u(x,t)$ 关于 x 的奇延拓，由 D'Alembert 公式可知，初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \widetilde{u}(x,0) = \widetilde{\varphi}(x), \quad \left.\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}\right|_{t=0} = \widetilde{\psi}(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

的形式解为

$$\widetilde{u}(x,t)=\frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x-at)+\widetilde{\varphi}(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\widetilde{\psi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

且 $\widetilde{u}(x,t)$ 关于 x 是奇函数，故将 $\widetilde{u}(x,t)$ 限制在 $\{(x,t)\mid x\geqslant 0,\ t\geqslant 0\}$ 上，就得到定解问题 (2.4.1) 的解.

下面来推导定解问题 (2.4.1) 的解 $u(x,t)$ 的表达式.

事实上，根据 $\widetilde{\varphi}$ 及 $\widetilde{\psi}$ 的定义可知，当 $0\leqslant t\leqslant\dfrac{x}{a}$ 时，

$$\widetilde{\varphi}(x-at)+\widetilde{\varphi}(x+at)=\varphi(x-at)+\varphi(x+at),$$

$$\int_{x-at}^{x+at}\widetilde{\psi}(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi;$$

当 $0\leqslant\dfrac{x}{a}<t$ 时，

$$\widetilde{\varphi}(x-at)+\widetilde{\varphi}(x+at)=-\varphi(at-x)+\varphi(x+at),$$

$$\begin{aligned}\int_{x-at}^{x+at}\widetilde{\psi}(\xi)\mathrm{d}\xi&=\int_{x-at}^{0}\widetilde{\psi}(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_{0}^{x+at}\widetilde{\psi}(\xi)\mathrm{d}\xi\\&=\int_{x-at}^{0}[-\psi(-\xi)]\mathrm{d}\xi+\int_{0}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\\&=\int_{at-x}^{0}\psi(\eta)\mathrm{d}\eta+\int_{0}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

综上可知，混合问题 (2.4.1) 的形式解为

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi, & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{x}{a},\\[2ex]\dfrac{1}{2}[\varphi(x+at)-\varphi(at-x)]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi, & 0\leqslant\dfrac{x}{a}<t.\end{cases}\tag{2.4.2}$$

上面的解法称为对称延拓法，表达式 (2.4.2) 是半无界问题的形式解.

对于 $u_t(0,t)=0$ 这种类型的半无界问题，与上面完全类似地作偶延拓求解. 奇延拓或偶延拓也可以求解半圆柱、半球等有界区域上的混合问题和其他类型的定解问题，其基本思路和这里的论述完全一样.

利用齐次化原理可以推得，非齐次方程的半无界问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=f(x,t), & x>0,\ t>0,\\[2ex]u(x,0)=0,\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0, & x\geqslant 0,\\[2ex]u(0,t)=0,\quad t\geqslant 0\end{cases}\tag{2.4.3}$$

的解可表示为

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^t \mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi, \quad 0\leqslant t\leqslant \dfrac{x}{a},\\ \dfrac{1}{2a}\left[\displaystyle\int_{t-\frac{x}{a}}^t \mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi+\int_0^{t-\frac{x}{a}}\mathrm{d}\tau\int_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\right],\\ \qquad 0\leqslant \dfrac{x}{a}<t.\end{cases} \tag{2.4.4}$$

对于非齐次边界条件的半无界问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad x>0,\ t>0,\\ u(x,0)=0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \quad x\geqslant 0,\\ u(0,t)=g(t), \quad t\geqslant 0,\end{cases} \tag{2.4.5}$$

可作辅助函数

$$u=v+g(t).$$

如果 u 为 (2.4.5) 的解，则 v 为下述初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-g''(t), \quad x>0,\ t>0,\\ v(x,0)=-g(0), \quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=-g'(0), \quad x\geqslant 0,\\ v(0,t)=0, \quad t\geqslant 0\end{cases}$$

的解，而此解可由 (2.4.2) 及 (2.4.4) 给出，从而可以得出定解问题 (2.4.5) 的解 u 的表达式.

习题　2.4

2.4.1　求解半无界弦的定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad x>0,\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x), \quad x\geqslant 0,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \quad t\geqslant 0.\end{cases}$$

2.4.2　求解定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad x>0,\ t>0,\\ u(x,0)=x\mathrm{e}^{-x^2}, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \quad x\geqslant 0,\\ u(0,t)=0, \quad t\geqslant 0.\end{cases}$$

2.5 波的传播与衰减

这一节中将讨论波动方程解的依赖区域、决定区域与影响区域的概念，研究三维与二维的波在传播中的不同特性，相应地介绍 Huygens 原理与波的弥散现象. 此外，还讨论波随着时间增加而衰减的性质.

2.5.1 三维波动的传播

假设 $f \equiv 0$. 此时三维波动方程的初值问题可写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \dfrac{u}{t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{2.5.1}$$

故由 Poisson 公式可知，初值问题 (2.5.1) 的解为

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{|y-x|=at} \varphi(y)\,\mathrm{d}S\right] + \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{|y-x|=at} \psi(y)\mathrm{d}S.$$

利用 (2.2.3) 式可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[tM_\varphi(x,at)] &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{|y-x|=at} \varphi(y)\mathrm{d}S\right] = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\iint\limits_{|\alpha|=1} t\varphi(x+at\alpha)\mathrm{d}\sigma\right] \\ &= \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{|\alpha|=1} \varphi(x+at\alpha)\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{|\alpha|=1} \sum_{i=1}^{3}\varphi_{y_i}(x+at\alpha)at\alpha_i\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \frac{1}{4\pi a^2 t^2}\iint\limits_{|y-x|=at} \left[\varphi(y) + \sum_{i=1}^{3}\varphi_{y_i}(y)(y_i - x_i)\right]\mathrm{d}S, \end{aligned}$$

于是 $u(x,t)$ 可写为

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t^2}\iint\limits_{|y-x|=at} \left[t\psi(y) + \varphi(y) + \sum_{i=1}^{3}\varphi_{y_i}(y)(y_i - x_i)\right]\mathrm{d}S. \tag{2.5.2}$$

依赖区域 任取一点 $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^3 \times (0,+\infty)$, 由式 (2.5.2) 可以看出，解 u 在点 (x_0,t_0) 处的值 $u(x_0,t_0)$, 只依赖于初始函数 φ、ψ 以及 φ 的一阶偏导数在以 x_0 为心、以 at_0 为半径的球面

$$S_{at_0}^{x_0} = \{(x,0) \mid |x - x_0| = at_0\}$$

上的值 (图 2.5.1). 因此，点 (x_0,t_0) 的依赖区域就是空间 $\mathbb{R}^3$ 中的球面 $S_{at_0}^{x_0}$, 它是以 (x_0,t_0) 为顶点向下作半顶角为 $\theta = \arctan a$ 的圆锥面

$$\Sigma = \{(x,t) \mid |x - x_0|^2 = a^2(t-t_0)^2,\ 0 \leqslant t \leqslant t_0\}$$

和超平面 $t = 0$ 的交截，这个圆锥面称为波动方程的特征锥面. 特征锥面连同其内

部称为特征锥，记为 K, 即

$$K=\{(x,t)\mid |x-x_0|^2\leqslant a^2(t-t_0)^2,\ 0\leqslant t\leqslant t_0\}.$$

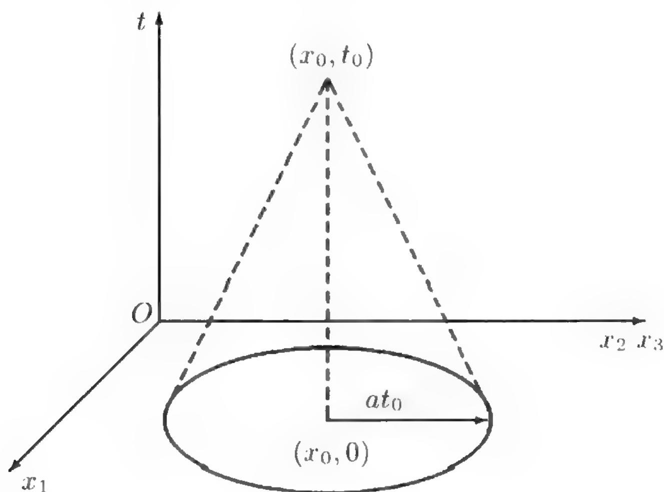


图 2.5.1

决定区域 对于特征锥 K 中任一点 (x^*,t^*), 其依赖区域都落在以 x_0 为心、以 at_0 为半径的球体

$$V_{at_0}^{x_0}=\{(x,0)\mid |x-x_0|\leqslant at_0\}$$

之中，即 $S_{at^*}^{x^*}\subseteq V_{at_0}^{x_0}$. 因此，解 $u(x,t)$ 在特征锥 K 内任一点的值，都由球域 $V_{at_0}^{x_0}$ 上的初始函数 φ 及 ψ 的值所决定，即特征锥 K 是球域 $V_{at_0}^{x_0}$ 的决定区域 (图 2.5.2).

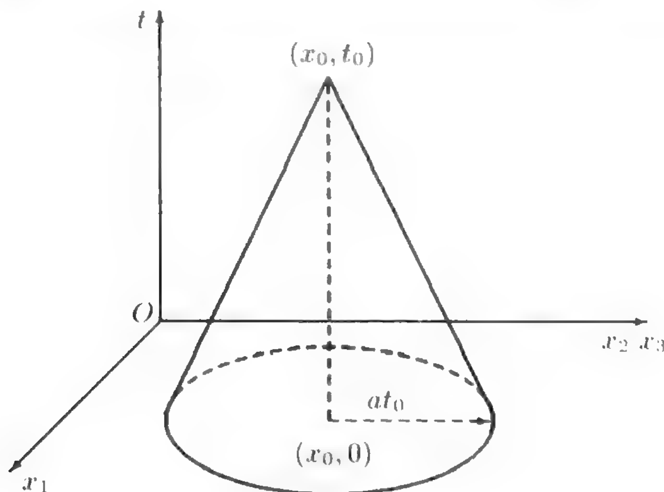


图 2.5.2

影响区域 在初始超平面 $t=0$ 上任取一点 $(x_0,0)$, 如果初始函数及其一阶偏导数在此点处有一个扰动，则当点 (x,t) 的依赖区域包含 $(x_0,0)$ 时，即 $(x_0,0)\in S_{at}^{x}$, 解 $u(x,t)$ 的值就要受到影响，而当 $(x_0,0)\notin S_{at}^{x}$ 时，解 $u(x,t)$ 的值不受影响，这种

点 (依赖区域包含 $(x_0,0)$) 的全体，就是点 $(x_0,0)$ 的影响区域. 因此，点 $(x_0,0)$ 的影响区域是以 $(x_0,0)$ 为顶点，半顶角为 $\theta=\arctan a$ 的向上的锥面 (图 2.5.3)

$$\{(x,t)\mid |x-x_0|^2=a^2t^2,\ t\geqslant 0\}.$$

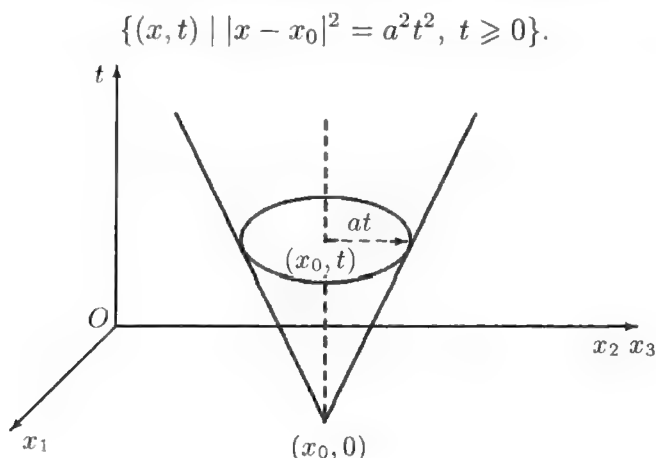


图 2.5.3

波的传播特性 假设 $t=0$ 时在 x_0 点处有一扰动，那么在时刻 t 这个扰动的影响面就是以 x_0 为心，以 at 为半径的球面 $S_{at}^{x_0}$, 即

$$S_{at}^{x_0}=\{(x,t)\mid |x-x_0|=at\}.$$

因此，对于空间一点 x, 设 $r=|x-x_0|$, 那么只有在 $t=\dfrac{r}{a}$ 时，点 x 处才受到这个扰动的影响. 事实上，在 $t<\dfrac{r}{a}$ 时，扰动尚未传到 x 处，而在 $t>\dfrac{r}{a}$ 时，扰动在 x 处的影响已经消除，这说明扰动以速度 a 向四周传播，而且在扰动过后不留下任何影响.

如果初始扰动不是集中在一点，而是发生在某一个有界区域 Ω 内 (图 2.5.4), 不妨假设在初始时刻初值 φ 及 ψ 只在区域 Ω 内不为零. 对 Ω 外的任一点 x_0, 令

$$d=\min_{y\in\overline{\Omega}}|y-x_0|,\quad D=\max_{y\in\overline{\Omega}}|y-x_0|.$$

下面考察问题 (2.5.1) 的解 (2.5.2) 在点 x_0 处的状态 $u(x_0,t)$ 随时间 t 的变化情况.

对任一时刻 t, 点 (x_0,t) 的依赖区域为

$$S_{at}^{x_0}=\{(x,0)\mid |x-x_0|=at\},$$

则当 $0<t<\dfrac{d}{a}$ 或 $t>\dfrac{D}{a}$ 时， $S_{at}^{x_0}\cap\Omega=\emptyset$, 因此 $u(x_0,t)=0$; 而只有当 $\dfrac{d}{a}<t<\dfrac{D}{a}$ 时， $S_{at}^{x_0}\cap\Omega\neq\emptyset$, 因此 $u(x_0,t)$ 才可能不为零. 这说明，在时刻 $t_1=\dfrac{d}{a}$, 扰动开始到达 x_0 点处，即扰动波的前缘到达 x_0 点；而过了时刻 $t_2=\dfrac{D}{a}$, 扰动对 x_0 点就不再发生影响，即在 $t_2=\dfrac{D}{a}$ 时刻扰动波的后缘经过 x_0 点，在任一时刻 t, 扰动波的前缘是所有以 Ω 中的点为心，以 at 为半径的球面的外包络面. 这个外包络面通常称

为传播波的前阵面 (图 2.5.5). 当 t 充分大时，这些球面还有一个内包络面，称为传播波的后阵面 (图 2.5.5). 在前阵面与后阵面之间的区域就是受到扰动影响的区域，前阵面以外的部分是尚未受到扰动影响的区域，后阵面以内的部分则是扰动的影响一过，又恢复了原来状态的区域.

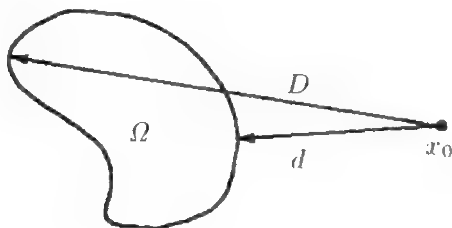


图 2.5.4

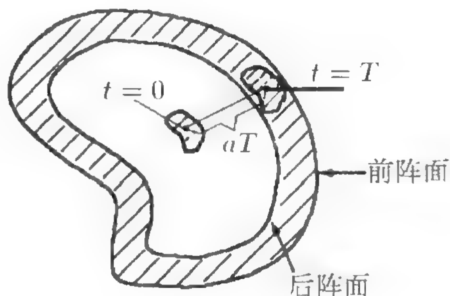


图 2.5.5

综上可知，当初始扰动限制在空间某一局部范围内时，三维波的传播有清晰的前阵面和后阵面，这个现象在物理学中称为 Huygens 原理或无后效现象. 由此可以解释为什么在 $\mathbb{R}^3$ 中，波前通过后会恢复平静，声波的传播就具有这样的特性.

2.5.2　二维波动的传播

假设 $f \equiv 0$, 此时二维波动方程的初值问题可写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{2.5.3}$$

由 Poisson 公式，初值问题 (2.5.3) 的解可写为

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{r \leqslant at} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{(at)^2 - r^2}}\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{r \leqslant at} \frac{\psi(y)}{\sqrt{(at)^2 - r^2}}\,\mathrm{d}\sigma\right].$$

其中 $r = |y - x| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$.

令 $\rho = \dfrac{r}{at}$, 利用极坐标变换可得

$$\iint\limits_{r \leqslant at} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{(at)^2 - r^2}}\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x + at\rho\alpha)}{\sqrt{1 - \rho^2}} at\rho\,\mathrm{d}\theta.$$

于是有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{r \leqslant at} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{(at)^2 - r^2}}\,\mathrm{d}\sigma &= \int_0^1 \frac{a\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi}\left[\varphi + \sum_{i=1}^2 at\rho\varphi_{y_i}\alpha_i\right]\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{t}\iint\limits_{r \leqslant at}\left[\frac{\varphi(y)}{\sqrt{(at)^2 - r^2}} + \sum_{i=1}^2 \frac{\varphi_{y_i}(y)(y_i - x_i)}{\sqrt{(at)^2 - r^2}}\right]\mathrm{d}\sigma. \end{aligned}$$

其中 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)=(\cos\theta,\sin\theta)$, $\varphi_{y_i}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_i}\ (i=1,2)$.

代入到 $u(x,t)$ 的表达式中，得

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi at}\iint\limits_{r\leqslant at}\left[\frac{\varphi(y)+t\psi(y)}{\sqrt{(at)^2-r^2}}+\sum_{i=1}^{2}\frac{\varphi_{y_i}(y)(y_i-x_i)}{\sqrt{(at)^2-r^2}}\right]\mathrm{d}\sigma. \tag{2.5.4}$$

利用 (2.5.4), 类似于对三维波的讨论，可以得到任意一点 (x_0,t_0) 的依赖区域是圆域

$$\Sigma_{at_0}^{x_0}=\{(x,0)\mid |x-x_0|\leqslant at_0\},$$

它是以 (x_0,t_0) 为顶点向下作半顶角为 $\theta=\arctan a$ 的特征锥 (而不是特征锥面)

$$K=\{(x,t)\mid |x-x_0|^2\leqslant a^2(t-t_0)^2,\ 0\leqslant t\leqslant t_0\}$$

与超平面 $t=0$ 的交截. 而这个特征锥 K 又恰好是圆域 $\Sigma_{at_0}^{x_0}$ 的决定区域.

对于初始超平面 $t=0$ 上的任一点 $(x_0,0)$, 它的影响区域是过点 $(x_0,0)$ 的特征锥体

$$\{(x,t)\mid |x-x_0|^2\leqslant a^2t^2,\ t\geqslant 0\},$$

而不是特征锥面.

在二维波的情况下，波的传播特性与三维波的传播有所不同. 假设 $t=0$ 时在 x_0 点有一扰动，那么在时刻 t, 这个扰动的影响范围是以 x_0 为心，以 at 为半径的圆域 (而不是圆周)

$$\Sigma_{at}^{x_0}=\{(x,t)\mid |x-x_0|\leqslant at\}.$$

因此对平面上与 x_0 距离为 r 的一点 x, 在时刻 $t=\dfrac{r}{a}$ 开始受到扰动的影响后，扰动对该点的影响不会消失. 这就是说，扰动虽然以速度 a 向四周传播，但扰动的影响将一直持续下去.

假设初始扰动集中在一个有界区域 Ω 内，在初始时刻初值 φ 及 ψ 只在区域 Ω 内不为零. 对 Ω 外的任一点 x_0, 令

$$d=\min_{y\in\overline{\Omega}}|y-x_0|,$$

对任一时刻 t, 点 (x_0,t) 的依赖区域为 $\Sigma_{at}^{x_0}$, 则当 $0<t<\dfrac{d}{a}$ 时，有 $\Sigma_{at}^{x_0}\cap\Omega=\emptyset$, 故 $u(x_0,t)=0$; 而当 $t\geqslant\dfrac{d}{a}$ 时，有 $\Sigma_{at}^{x_0}\cap\Omega\neq\emptyset$, 故 $u(x_0,t)$ 才可能不为零. 这说明，当 $t<\dfrac{d}{a}$ 时，扰动未到达 x_0 点处；但当 $t\geqslant\dfrac{d}{a}$ 时，扰动波的前缘开始到达 x_0 点处，并一直延续下去，不会恢复原来的状态，即随着时间的增长，扰动影响并不消失 (但随着时间 t 的无限增长，扰动影响越来越弱), 它具有长期的连续的后效特性. 扰动传播的前阵面是所有以 Ω 中的点为中心，以 at 为半径的圆域的外包络面. 因此，

波的传播有清晰的前阵面，但不再有后阵面， Huygens 原理不再成立，这个现象在物理学上称为波的弥散. 这是二维波动与三维波动的一个本质的区别，水波可以近似地作为平面上二维波的例子.

上面讨论的波的传播现象并不仅限于二维与三维空间中的波动方程. 可以证明，在空间维数 n 是奇数时 $(n \neq 1)$, 对于波动方程 Huygens 原理总成立；而当空间维数 n 是偶数时，总有波的弥散现象发生， Huygens 原理不成立. 在一维波动情形，由 D'Alembert 公式可以看出，波的传播现象是介于二维和三维情形之间的，即初始位移无后效，而初始速度是有后效的.

2.5.3 波动方程解的衰减

下面对 $n=3$ 情形，研究当 $t \to +\infty$ 时，波动方程初值问题 (2.5.1) 的解 (2.5.2) 的渐近性态.

假设 $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$, 并且在一有界区域外 φ 及 ψ 恒等于零 (称为具有紧支集). 此时，必存在一个常数 $\rho > 0$, 使 φ 及 ψ 在以原点为心、以 ρ 为半径的球 Σ_ρ^0 外恒为零，而在球 Σ_ρ^0 内成立

$$|\varphi| \leqslant C_1, \quad |\psi| \leqslant C_1, \quad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| \leqslant C_1 \quad (i=1,2,3),$$

其中 C_1 为一正常数.

由于对 $\forall y \in S_{at}^x$, 有

$$|y_i - x_i| \leqslant at \quad (i=1,2,3),$$

$$\left(S_{at}^x \cap \Sigma_\rho^0\right)\text{的面积} \leqslant 4\pi\rho^2,$$

从而当 $t>1$ 时，对 $\forall\, x \in \mathbb{R}^3$, 有

$$\begin{aligned}
|u(x,t)| &= \frac{1}{4\pi a^2 t^2}\left|\iint\limits_{S_{at}^x}\left[t\psi(y)+\varphi(y)+\sum_{i=1}^3 \varphi_{y_i}(y)(y_i-x_i)\right]\mathrm{d}S_y\right| \\
&= \frac{1}{4\pi a^2 t^2}\left|\iint\limits_{S_{at}^x\cap\Sigma_\rho^0}\left[t\psi(y)+\varphi(y)+\sum_{i=1}^3 \varphi_{y_i}(y)(y_i-x_i)\right]\mathrm{d}S_y\right| \\
&\leqslant \frac{1}{4\pi a^2 t^2}(C_1 t + C_1 + 3C_1 at)4\pi\rho^2 \leqslant Ct^{-1},
\end{aligned}$$

其中 $C = \dfrac{1}{a^2}(C_1 + C_1 + 3C_1 a)\rho^2$.

由此可见，如果初始函数具有紧支集，那么当 $t \to +\infty$ 时，问题 (2.5.1) 的解 $u(x,t)$ 关于 $x \in \mathbb{R}^3$ 一致地趋向于零.

在 $n=2$ 情形时，如果初始函数具有紧支集，那么当 $t \to +\infty$ 时，问题 (2.5.3) 的解 $u(x,t)$ 趋向于零，但非一致地趋向于零. 证明留给读者.

习题 2.5

2.5.1 试说明：对一维波动方程， Huygens 原理不成立.

2.5.2 对一维波动方程，若初始资料具有紧支集，那么当 $t \to +\infty$ 时，其初值问题的解是否一定一致趋向于零？

2.5.3 设 u 为初始资料 φ 及 ψ 具有紧支集的二维波动方程的解，证明：对 $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^2$，有

$$\lim_{t\to+\infty} u(x_0,t) = 0.$$

2.5.4 在 $t=0$ 平面上以点 $(0,0)$ 为圆心，以 1 为半径的圆域内给定函数 φ 和 ψ 的值，其中 φ 和 ψ 充分光滑. 问能否决定初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ t>0, \\ u(x,y,0)=\varphi(x,y), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x,y), & (x,y)\in\mathbb{R}^2 \end{cases}$$

的解 u 在点 $(x,y,t)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 的值，说明理由.

2.6 能量积分法 解的唯一性及稳定性

在这一节中，我们将介绍偏微分方程理论中一个常用的方法——能量积分法，给出双曲型方程解的唯一性和稳定性的直接证明，即不依赖于解的表达式的直接证明.

2.6.1 混合问题解的唯一性及稳定性

以二维波动方程为例. 假设 Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 中的有界区域，考察混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = f(x,t), & (x,t)\in Q=\Omega\times(0,+\infty), \\ u(x,0)=\varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x), & x\in\overline{\Omega}, \\ b\dfrac{\partial u}{\partial n}+cu=g(x,t), & (x,t)\in\Sigma=\partial\Omega\times[0,+\infty), \end{cases} \tag{2.6.1}$$

其中 n 为 Σ 的单位外法线向量， $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$ 且 $b^2+c^2\neq 0$.

定理 2.6.1 (解的唯一性)
二维波动方程混合问题 (2.6.1) 的解如果存在，则必是唯一的.

证明 设 u_1 与 u_2 为混合问题 (2.6.1) 的两个解，则 $u=u_1-u_2$ 为混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = 0, & x\in Q, \\ u(x,0)=0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0, & x\in\overline{\Omega}, \\ b\dfrac{\partial u}{\partial n}+cu=0, & (x,t)\in\Sigma \end{cases} \tag{2.6.2}$$

的解. 下面证明在 $\overline{Q}$ 上 $u(x,t)\equiv 0$.

将混合问题 (2.6.2) 中的方程两端同时乘以 u_t, 并在 Ω 上积分, 得

$$\iint_{\Omega} u_t[u_{tt}-a^2(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2})]\mathrm{d}x=0,$$

并利用 Green 公式可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}\iint_{\Omega} u_t u_{x_ix_i}\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{2}\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(u_t u_{x_i})-u_{tx_i}u_{x_i}\right]\mathrm{d}x\\ &= \sum_{i=1}^{2}\int_{\partial\Omega} u_t u_{x_i}\cos(\boldsymbol{n},x_i)\mathrm{d}S-\sum_{i=1}^{2}\iint_{\Omega} u_{tx_i}u_{x_i}\mathrm{d}x\\ &= \int_{\partial\Omega} u_t\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{\Omega} u_{x_i}^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

从而由

$$\iint_{\Omega} u_t\left(u_{tt}-a^2\sum_{i=1}^{2}u_{x_ix_i}\right)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\iint_{\Omega} u_t^2\mathrm{d}x\right]-a^2\sum_{i=1}^{2}\iint_{\Omega} u_t u_{x_ix_i}\mathrm{d}x=0$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\iint_{\Omega}(u_t^2+a^2u_{x_1}^2+a^2u_{x_2}^2)\mathrm{d}x\right]-a^2\int_{\partial\Omega} u_t\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=0. \tag{2.6.3}$$

另一方面, 当 $b\neq 0$ 时, 由边界条件 $\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\Sigma}=-\frac{c}{b}u\big|_{\Sigma}$ 可知, 对 $\forall\, t\geqslant 0$, 有

$$\int_{\partial\Omega} u_t\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=-\frac{c}{b}\int_{\partial\Omega} uu_t\mathrm{d}S=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{c}{2b}\int_{\partial\Omega} u^2\mathrm{d}S\right].$$

从而由式 (2.6.3) 可知, 对 $\forall\, t>0$, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\iint_{\Omega}(u_t^2+a^2u_{x_1}^2+a^2u_{x_2}^2)\mathrm{d}x+\frac{a^2c}{2b}\int_{\partial\Omega} u^2\mathrm{d}S\right]=0.$$

当 $b=0$ 时, 由 $b^2+c^2\neq 0$ 可知, $c\neq 0$, 故由边界条件 $u\big|_{\Sigma}=0$ 及初始条件可知, 对 $\forall\, t\geqslant 0$, 有 $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\partial\Omega}=0$, 从而由式 (2.6.3) 可知, 对 $\forall\, t>0$, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\iint_{\Omega}(u_t^2+a^2u_{x_1}^2+a^2u_{x_2}^2)\mathrm{d}x\right]=0.$$

综上可知, 对 $\forall\, t\geqslant 0$, 记

$$E(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\iint_{\Omega}[u_t^2+a^2(u_{x_1}^2+u_{x_2}^2)]\mathrm{d}x+\dfrac{a^2c}{2b}\int_{\partial\Omega} u^2\mathrm{d}S, & b\neq 0,\\[2ex] \dfrac{1}{2}\displaystyle\iint_{\Omega}[u_t^2+a^2(u_{x_1}^2+u_{x_2}^2)]\mathrm{d}x, & b=0,\end{cases} \tag{2.6.4}$$

则对 $\forall\, t>0$, 有

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}=\iint\limits_{\Omega}u_t[u_{tt}-a^2(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2})]\mathrm{d}x=0,$$

故 $E(t)$ 恒等于常数，从而由初始条件可知，对 $\forall\, x\in\Omega$, 由

$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0,\quad u_{x_1}(x,0)=0,\quad u_{x_2}(x,0)=0$$

可得 $E(t)=E(0)=0$, 即对 $\forall\,(x,t)\in Q$, 有

$$u_t\equiv 0,\quad u_{x_1}\equiv 0,\quad u_{x_2}\equiv 0.$$

利用 u 的连续性及 $u(x,0)=0$ 可知，对 $\forall\,(x,t)\in\overline{Q}$, 有 $u\equiv 0$. ▌

在上述定理证明中，由表达式 (2.6.4) 确定的函数 $E(t)$ 起着重要作用，它在膜振动问题中有实际的物理意义.

膜振动问题可归结为混合问题 (2.6.1), 在没有外力作用的情形下，当膜的边界满足 (2.6.2) 的边界条件时，膜在 t 时刻所具有的总动能为

$$\frac{\rho}{2}\iint\limits_{\Omega}u_t^2(x_1,x_2,t)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,$$

膜在 t 时刻所具有的总势能为

$$\begin{cases}\dfrac{T}{2}\left[\displaystyle\iint\limits_{\Omega}(u_{x_1}^2+u_{x_2}^2)\mathrm{d}x+\frac{c}{b}\int_{\partial\Omega}u^2\mathrm{d}S\right], & b\neq 0,\\ \dfrac{T}{2}\displaystyle\iint\limits_{\Omega}(u_{x_1}^2+u_{x_2}^2)\mathrm{d}x, & b=0.\end{cases}$$

如果不计常数因子， $E(t)$ 表示在区域 Ω 中，满足齐次边界条件的膜在任意时刻 t 的总能量. 在数学上， $E(t)$ 称为能量积分或称为解的能量膜. 利用能量积分的概念，定理 2.6.1 的证明方法称为能量积分法.

对于满足齐次边界的膜振动，在不受外力作用的情况下，总能量是守恒的，于是可得如下引理.

引理 2.6.1 设 $u(x,t)$ 是混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\Delta u=0, & (x,t)\in Q,\\ u(x,0)=\varphi(x),\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x), & x\in\overline{\Omega},\\ b\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}+cu=0, & (x,t)\in\Sigma\end{cases}$$

的解，则由 (2.6.4) 所确定的能量积分 $E(t)$ 保持不变，即 $E(t)\equiv E(0)$.

引理 2.6.1 的证明留给读者. 引理 2.6.1 的结论对于 $n=1$ 及 $n=3$ 的情形也成立，由此可证定理 2.6.1 的结论对于 $n=1$ 及 $n=3$ 的情形也成立.

下面利用能量积分给出能量不等式，并讨论解的稳定性.

在混合问题 (2.6.1) 中，令 $g(x,t)\big|_{\Sigma} \equiv 0$, 则对应的解成立如下的能量不等式.

引理 2.6.2 (能量不等式)

设 $u(x,t)$ 是混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \\ b\dfrac{\partial u}{\partial n} + cu = 0, \quad (x,t) \in \Sigma \end{cases} \tag{2.6.5}$$

的解，则对 $\forall\, T > 0$, 存在 $M(T) > 0$, 当 $0 \leqslant t \leqslant T$ 时，有

$$E(t) \leqslant M(T)\left[E(0) + \iiint\limits_{Q_T} f^2(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right],$$

其中 $Q_T = \Omega \times [0,T]$, 能量积分 $E(t)$ 由 (2.6.4) 所确定.

证明 设 $u(x,t)$ 为混合问题 (2.6.5) 的解，$E(t)$ 由 (2.6.4) 所确定，则对 $\forall\, t > 0$, 将混合问题 (2.6.5) 中的方程两端分别乘以 u_t, 并在 Ω 上求积分，得

$$\iint\limits_{\Omega} u_t[u_{tt} - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2})]\mathrm{d}x = \iint\limits_{\Omega} u_t f\,\mathrm{d}x,$$

故由定理 2.6.1 的推导可得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} &= \iint\limits_{\Omega} u_t[u_{tt} - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2})]\mathrm{d}x = \iint\limits_{\Omega} u_t f\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega} u_t^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega} f^2\mathrm{d}x \leqslant E(t) + \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega} f^2\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

从而将不等式两端乘以 e^{-t} 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-t}E(t)] \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\iint\limits_{\Omega} f^2\mathrm{d}x.$$

再将上式从 0 到 t 积分，得

$$E(t) \leqslant \mathrm{e}^t E(0) + \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{e}^{t-\tau}\iint\limits_{\Omega} f^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \leqslant \mathrm{e}^t\left[E(0) + \int_0^t \iint\limits_{\Omega} f^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right].$$

综上可知，对 $\forall\, T > 0$, 取 $M(T) = \mathrm{e}^T$, 当 $0 \leqslant t \leqslant T$ 时，由 $\mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^T$ 可得

$$E(t) \leqslant M(T)\left[E(0) + \iiint\limits_{Q_T} f^2(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right]. \quad \blacksquare$$

由引理 2.6.2 及式 (2.6.4) 可知，对 $\forall T>0$, 有解的一阶偏导数的估计

$$E(t)\leqslant C(T)\left[\iint\limits_{\Omega}\left(\psi^2+a^2\sum_{i=1}^{2}\varphi_{x_i}^2\right)\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\varphi^2\mathrm{d}S+\iiint\limits_{Q_T}f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right].$$

引理 2.6.3 (能量不等式)

设 $u(x,t)$ 是混合问题 (2.6.5) 的解，且

$$E_0(t)=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega}u^2(x,t)\,\mathrm{d}x,$$

则对 $\forall T>0$, 存在 $M_1(T)>0$, 当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时，有

$$E_0(t)\leqslant M_1(T)\left[E_0(0)+E(0)+\iiint\limits_{Q_T}f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right],$$

且存在 $M_2(T)>0$, 当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时，有

$$\iiint\limits_{Q_T}u^2(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant M_2(T)\left[E_0(0)+E(0)+\iiint\limits_{Q_T}f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right].$$

证明 对 $\forall t>0$, 由 $E_0(t)$ 的表达式可得

$$\frac{\mathrm{d}E_0(t)}{\mathrm{d}t}=\iint\limits_{\Omega}uu_t\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega}[u^2+u_t^2]\mathrm{d}x\leqslant E_0(t)+E(t),$$

将上式两端乘以 e^{-t}, 得

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t}E_0(t)}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}E_0(t)}{\mathrm{d}t}-\mathrm{e}^{-t}E_0(t)\leqslant\mathrm{e}^{-t}E(t),$$

再将上面的不等式从 0 到 t 积分，得

$$E_0(t)\leqslant\mathrm{e}^tE_0(0)+\int_0^t\mathrm{e}^{t-\tau}E(\tau)\mathrm{d}\tau\leqslant\mathrm{e}^tE_0(0)+\mathrm{e}^t\int_0^tE(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

从而由引理 2.6.2 可知，对 $\forall T>0$, 当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时，有

$$\begin{aligned}E_0(t)&\leqslant\mathrm{e}^TE_0(0)+\int_0^T\mathrm{e}^T\left[E(0)+\iiint\limits_{Q_T}f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau\\&\leqslant\mathrm{e}^TE_0(0)+T\mathrm{e}^T\left[E(0)+\iiint\limits_{Q_T}f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right].\end{aligned}$$

综上可知，对 $\forall T>0$, 取 $M_1(T)=(T+1)\mathrm{e}^T$, 当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时，有

$$E_0(t)\leqslant M_1(T)\left[E_0(0)+E(0)+\iiint\limits_{Q_T}f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right],$$

取 $M_2(T) = 2TM_1(t)$, 当 $0 \leqslant t \leqslant T$ 时, 将上式从 0 到 T 积分, 得

$$\iiint\limits_{Q_T} u^2(x,t)\mathrm{d}x = \int_0^T \iint\limits_{\Omega} u^2(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 2\int_0^T E_0(t)\mathrm{d}t$$

$$\leqslant 2M_1(T)\int_0^T \left[E_0(0) + E(0) + \iiint\limits_{Q_T} f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t,$$

从而

$$\iiint\limits_{Q_T} u^2(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant M_2(T)\left[E_0(0) + E(0) + \iiint\limits_{Q_T} f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right].$$

现在引入平均值模的记号

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \iint\limits_{\Omega} u^2\mathrm{d}x,\quad \|u\|^2_{L^2(Q_T)} = \iiint\limits_{Q_T} u^2\mathrm{d}x,\quad \|\varphi\|^2_{L^2(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega}\varphi^2\mathrm{d}x,$$

则由上述引理可得如下估计式

$$\|u\|_1^2 + \|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_1(T)\left[\|\varphi\|_1^2 + \|\psi\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q_T)}\right],$$

$$\|u\|^2_{L^2(Q_T)} \leqslant C_2(T)\left[\|\varphi\|_1^2 + \|\psi\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q_T)}\right], \tag{2.6.6}$$

其中 $C_1(T)$, $C_2(T)$ 是与 T 有关的常数,

$$\|u\|_1^2 = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{2}\|u_{x_i}\|^2_{L^2(\Omega)},$$

$$\|\varphi\|_1^2 = \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{2}\|\varphi_{x_i}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|^2_{L^2(\partial\Omega)}.$$

利用上述引理可得如下定理.

定理 2.6.2 (解的稳定性)

如果二维波动方程混合问题 (2.6.5) 的解 u 存在, 则 u 连续依赖于所给的初始函数 φ、ψ 与方程右端项 f, 即对 $\forall\,\varepsilon > 0$ 及充分大的 $T > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当初始函数满足 $\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} < \delta$、$\|\varphi_{x_1}\|_{L^2(\Omega)} < \delta$、$\|\varphi_{x_2}\|_{L^2(\Omega)} < \delta$、$\|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega)} < \delta$、$\|\psi\|_{L^2(\Omega)} < \delta$ 及方程右端项满足 $\|f\|_{L^2(Q_T)} < \delta$ 时, 有

$$\|u\|_{L^2(Q_T)} < \varepsilon,$$

其中 $Q_T = \Omega \times [0,T]$.

证明 设 $u(x,t)$ 是混合问题 (2.6.5) 的解, 则对 $\forall\,\varepsilon > 0$ 及充分大的 $T > 0$, 由引理 2.6.3 可知, 存在 $C(T) > 0$, 使得

$$\|u\|^2_{L^2(Q_T)} \leqslant C(T)\left[\|\varphi\|_1^2 + \|\psi\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q_T)}\right],$$

其中

$$\|\varphi\|_1^2 = \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{2} \|\varphi_{x_i}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega)}^2.$$

对上述 $\forall\, \varepsilon > 0$ 及 $T > 0$, 取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{6C(T)+1}}$, 当初始函数满足 $\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} < \delta$、$\|\varphi_{x_1}\|_{L^2(\Omega)} < \delta$、$\|\varphi_{x_2}\|_{L^2(\Omega)} < \delta$、$\|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega)} < \delta$、$\|\psi\|_{L^2(\Omega)} < \delta$ 及方程右端项满足 $\|f\|_{L^2(Q_T)} < \delta$ 时，有

$$\|\varphi\|_1^2 < \delta^2 + 2\delta^2 + \delta^2 = 4\delta^2,$$

从而

$$\|u\|_{L^2(Q_T)}^2 \leqslant C(T)[4\delta^2 + \delta^2 + \delta^2] = 6C(T)\delta^2 < \varepsilon^2,$$

即

$$\|u\|_{L^2(Q_T)} < \varepsilon.$$ ▮

上述引理及定理 2.6.2 的结论对于 $n = 1$ 及 $n = 3$ 的情形也成立，请读者自行完成证明. 利用第 3 节定理 2.3.1 可得如下结论.

定理 2.6.3 若 $\varphi(x) \in C^3[0,l]$、$\psi(x) \in C^2[0,l]$ 以及初始函数 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ 适合相容性条件

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0,$$

则混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$

存在唯一解 $u(x,y,t) \in C^2([0,l] \times [0,+\infty))$, 并且 u 连续依赖于所给的初始函数.

2.6.2 能量不等式 初值问题解的唯一性及稳定性

对于二维波动方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^2,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{2.6.7}$$

如果完全按照前面混合问题的方法建立能量不等式，就需要在 $\mathbb{R}^2$ 上计算能量积分

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left[u_t^2 + a^2 \sum_{i=1}^{2} u_{x_i}^2\right] \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$

在一般情形下，上述积分可能是发散的．为避免这一困难，我们设法选择一个有界区域来建立能量不等式．

对于二维波动方程初值问题，从其解的表达式可看出解对初值和方程右端项的依赖关系．任取上半空间 $\mathbb{R}^2\times(0,+\infty)$ 内的一点 (x_0,t_0)．那么解 $u(x_0,t_0)$ 的值只依赖于初始条件 φ、ψ 在圆域

$$\Sigma_{at_0}^{x_0}=\{(x,0)\mid |x-x_0|^2\leqslant a^2t_0^2\}$$

上的值及方程右端项 f 在特征锥

$$K=\{(x,t)\mid |x-x_0|^2\leqslant a^2(t_0-t)^2,\ 0\leqslant t\leqslant t_0\}$$

上的值，也就是说解 u 在点 (x_0,t_0) 的值由 φ、ψ 及 f 在特征锥 K 内的值唯一确定．因此对于二维波动方程初值问题的解，可由特征锥 K 上的定解条件所确定．当取定 $t=\tau$ 时，特征锥 K 与超平面 $\{(x,t)\mid t=\tau\}$ 的交截区域 $K\cap\{(x,t)\mid t=\tau\}$ 可视为是 $\mathbb{R}^2$ 中的有界区域 Ω_τ．即 Ω_τ 在 $\mathbb{R}^2$ 的投影区域为 $\Sigma_{a(t_0-\tau)}^{x_0}$．

设 $u(x_1,x_2,t)\in C^1$，在 Ω_t 上定义 (能量) 积分

$$\Omega(t)=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega_t}\left[u_t^2(x_1,x_2,t)+a^2\sum_{i=1}^2u_{x_i}^2(x_1,x_2,t)\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,$$

类似前面混合问题的方法，可得到下面的能量不等式．

引理 2.6.4 设 $u(x,t)$ 是初值问题 (2.6.7) 的解，则对 $\forall\, t_0>0$，存在 $M(t_0)>0$，当 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 时，有能量不等式

$$\Omega(t)\leqslant M(t_0)\left[\Omega(0)+\iiint\limits_{K_t}f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right],$$

其中 $M(t_0)=\mathrm{e}^{t_0}$，$K_t=\{(x,\tau)\mid |x-x_0|^2\leqslant a^2(t_0-\tau)^2,\ 0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant t_0\}$．

证明 设 $u(x,t)$ 是初值问题 (2.6.7) 的解，对 $\forall\, t_0>0$，当 $0<t\leqslant t_0$ 时，将 $\Omega(t)$ 两端关于 t 求导数，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Omega(t)}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{a(t_0-t)}\int_0^{2\pi}\left[u_t^2+a^2\sum_{i=1}^2u_{x_i}^2\right]\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho\\&=\iint\limits_{\Omega_t}\left[u_tu_{tt}+a^2\sum_{i=1}^2u_{x_i}u_{x_it}\right]\mathrm{d}x-\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\left[u_t^2+a^2\sum_{i=1}^2u_{x_i}^2\right]a(t_0-t)\mathrm{d}\theta\\&=\iint\limits_{\Omega_t}\left[u_tu_{tt}+a^2\sum_{i=1}^2u_{x_i}u_{x_it}\right]\mathrm{d}x-\frac{a}{2}\int_{\partial\Omega_t}\left[u_t^2+a^2\sum_{i=1}^2u_{x_i}^2\right]\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

故由

$$u_{tt}=a^2(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2})+f$$

及 Green 公式可得

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Omega_t}\left[u_t u_{tt}+a^2\sum_{i=1}^{2}u_{x_i}u_{x_it}\right]\mathrm{d}x&=\iint\limits_{\Omega_t}\left[u_t f+a^2\sum_{i=1}^{2}(u_t u_{x_ix_i}+u_{x_i}u_{x_it})\right]\mathrm{d}x\\&=\iint\limits_{\Omega_t}u_t f\mathrm{d}x+a^2\sum_{i=1}^{2}\iint\limits_{\Omega_t}\frac{\partial(u_t u_{x_i})}{\partial x_i}\mathrm{d}x\\&=\iint\limits_{\Omega_t}u_t f\mathrm{d}x+a^2\sum_{i=1}^{2}\int_{\partial\Omega_t}u_t u_{x_i}\cos(\boldsymbol{n},x_i)\mathrm{d}S,\end{aligned}$$

并由

$$u_t^2=u_t^2\cos^2(\boldsymbol{n},x_1)+u_t^2\cos^2(\boldsymbol{n},x_2)$$

可得

$$\frac{a}{2}\int_{\partial\Omega_t}\left[u_t^2+a^2\sum_{i=1}^{2}u_{x_i}^2\right]\mathrm{d}S=\frac{a}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{\partial\Omega_t}[u_t^2\cos^2(\boldsymbol{n},x_i)+a^2u_{x_i}^2]\mathrm{d}S,$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Omega(t)}{\mathrm{d}t}&=\iint\limits_{\Omega_t}u_t f\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{2}\int_{\partial\Omega_t}\left[a^2u_t u_{x_i}\cos(\boldsymbol{n},x_i)-\frac{a}{2}u_t^2\cos^2(\boldsymbol{n},x_i)-\frac{a}{2}a^2u_{x_i}^2\right]\mathrm{d}S\\&=\iint\limits_{\Omega_t}u_t f\mathrm{d}x-\frac{a}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{\partial\Omega_t}[u_t\cos(\boldsymbol{n},x_i)-au_{x_i}]^2\mathrm{d}S,\end{aligned}\tag{2.6.8}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 $\partial\Omega_t$ 的单位外法线向量.

综上可知，对 $\forall\, t_0>0$, 取 $M(t_0)=\mathrm{e}^{t_0}$, 当 $0<t\leqslant t_0$ 时，则由式 (2.6.8) 可得

$$\frac{\mathrm{d}\Omega(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant\iint\limits_{\Omega_t}u_t f\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega_t}u_t^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega_t}f^2\mathrm{d}x\leqslant\Omega(t)+\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega_t}f^2\mathrm{d}x,$$

在上式两边同乘以 e^{-t}, 再从 0 到 t 积分，得

$$\Omega(t)\leqslant\mathrm{e}^t\Omega(0)+\frac{1}{2}\int_0^t\mathrm{e}^{t-\tau}\mathrm{d}\tau\iint\limits_{\Omega_\tau}f^2\mathrm{d}x,$$

从而由 $\mathrm{e}^t\leqslant\mathrm{e}^{t_0}$, $\mathrm{e}^{t-\tau}\leqslant\mathrm{e}^{t_0}$ $(0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant t_0)$ 可得

$$\Omega(t)\leqslant\mathrm{e}^{t_0}\left[\Omega(0)+\frac{1}{2}\int_0^t\mathrm{d}\tau\iint\limits_{\Omega_\tau}f^2\mathrm{d}x\right]\leqslant M(t_0)\left[\Omega(0)+\iiint\limits_{K_t}f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right].$$ ∎

引理 2.6.5 设 $u(x,t)$ 是初值问题 (2.6.7) 的解，则对 $\forall\, t_0>0$, 存在 $M_1(t_0)>0$, 当 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 时，有能量不等式

$$\iiint\limits_{K_t}\left[u_t^2+a^2\sum_{i=1}^{2}u_{x_i}^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\leqslant M_1(t_0)\left[\Omega(0)+\iiint\limits_{K_t}f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right].$$

证明 设 $u(x,t)$ 是初值问题 (2.6.7) 的解，则对 $\forall\, t_0>0$, 选取 $M_1(t_0)=2t_0\mathrm{e}^{t_0}$. 当 $0<t\leqslant t_0$ 时，由引理 2.6.4 可得

$$\Omega(t)\leqslant \mathrm{e}^{t_0}\left[\Omega(0)+\iiint\limits_{K_t} f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right],$$

将上式两端关于 t 从 0 到 t 积分，得

$$\begin{aligned}\int_0^t\Omega(\tau)\mathrm{d}\tau &\leqslant \mathrm{e}^{t_0}\int_0^t\left[\Omega(0)+\iiint\limits_{K_\tau} f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\lambda\right]\mathrm{d}\tau\\ &\leqslant t_0\mathrm{e}^{t_0}\Omega(0)+\mathrm{e}^{t_0}\int_0^t\left[\iiint\limits_{K_t} f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\lambda\right]\mathrm{d}\tau\\ &\leqslant t_0\mathrm{e}^{t_0}\Omega(0)+t_0\mathrm{e}^{t_0}\iiint\limits_{K_t} f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

从而由 $\Omega(\tau)$ 的定义，得

$$\iiint\limits_{K_t}\left[u_t^2+a^2\sum_{i=1}^2 u_{x_i}^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\leqslant M_1(t_0)\left[\Omega(0)+\iiint\limits_{K_t} f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right].$$ ▌

引理 2.6.6 设 $u(x,t)$ 是初值问题 (2.6.7) 的解，且

$$\Omega_0(t)=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega_t}u^2\mathrm{d}x,$$

则对 $\forall\, t_0>0$, 存在 $M_2(t_0)>0$, 当 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 时，有

$$\Omega_0(t)\leqslant M_2(t_0)\left[\Omega_0(0)+\Omega(0)+\iiint\limits_{K_t} f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right],$$

且存在 $M_3(t_0)>0$, 当 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 时，有

$$\iiint\limits_{K_t}u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\leqslant M_3(t_0)\left[\Omega_0(0)+\Omega(0)+\iiint\limits_{K_t} f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right].$$

证明 设 $u(x,t)$ 是初值问题 (2.6.7) 的解，则对 $\forall\, t_0>0$, 当 $0<t\leqslant t_0$ 时，将函数 $\Omega_0(t)$ 两端关于 t 求导，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Omega_0(t)}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{a(t_0-t)}\int_0^{2\pi}u^2\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho\\ &=-\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}u^2\rho\Big|_{\rho=a(t_0-t)}\mathrm{d}\theta+\int_0^{a(t_0-t)}\int_0^{2\pi}uu_t\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho\\ &=-\frac{a}{2}\int_{\partial\Omega_t}u^2\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Omega_t}uu_t\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega_t}[u^2+u_t^2]\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

故由引理 2.6.4 可得

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_0(t)}{\mathrm{d}t} \leqslant \Omega_0(t) + \mathrm{e}^{t_0}\left[\Omega(0) + \iiint\limits_{K_t} f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right],$$

从而将上式两边同乘以 e^{-t}, 从 0 到 t 积分，得

$$\begin{aligned}\Omega_0(t) &\leqslant \mathrm{e}^t\Omega_0(0) + \mathrm{e}^{t_0}\int_0^t \mathrm{e}^{t-\tau}\left[\Omega(0) + \iiint\limits_{K_\tau} f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}\lambda\right]\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant \mathrm{e}^t\Omega_0(0) + {}^{t_0}\mathrm{e}^t\left[\Omega(0) + \iiint\limits_{K_t} f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right].\end{aligned}$$

综上可知，对 $\forall\, t_0 > 0$, 选取 $M_2(t) = \mathrm{e}^{2t_0}$, 当 $0 < t \leqslant t_0$ 时，有

$$\Omega_0(t) \leqslant M_2(t_0)\left[\Omega_0(0) + \Omega(0) + \iiint\limits_{K_t} f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right],$$

选取 $M_3(t) = 2t_0\mathrm{e}^{2t_0}$, 当 $0 < t \leqslant t_0$ 时，将上式两端关于 t 从 0 到 t 积分，得

$$\begin{aligned}\int_0^t \Omega_0(\tau)\mathrm{d}\tau &\leqslant M_2(t_0)\int_0^t \left[\Omega_0(0) + \Omega(0) + \iiint\limits_{K_\tau} f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}\lambda\right]\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant M_2(t_0)t\left[\Omega_0(0) + \Omega(0) + \iiint\limits_{K_t} f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right],\end{aligned}$$

从而

$$\iiint\limits_{K_t} u^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \leqslant M_3(t_0)\left[\Omega_0(0) + \Omega(0) + \iiint\limits_{K_t} f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right].$$ ▌

定理 2.6.4 如果二维波动方程初值问题 (2.6.7) 的解存在, 则必是唯一的, 并且连续依赖于所给的初始函数 φ、ψ 及方程右端项 f, 即对 $\forall\,\varepsilon > 0$ 及充分大的 $T > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当初始函数满足 $\|\varphi\|_{L^2(\Omega_0)} < \delta$、$\|\varphi_{x_1}\|_{L^2(\Omega_0)} < \delta$、$\|\varphi_{x_2}\|_{L^2(\Omega_0)} < \delta$、$\|\psi\|_{L^2(\Omega_0)} < \delta$ 及方程右端项满足 $\|f\|_{L^2(K)} < \delta$ 时，有

$$\|u\|_{L^2(K)} < \varepsilon,$$

其中 $K = \{(x,t) \mid |x - 0| \leqslant a(T-t),\ x \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$.

证明 设 u_1, u_2 是初值问题 (2.6.7) 的两个解，则 $u = u_1 - u_2$ 满足定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^2,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, & x \in \mathbb{R}^2.\end{cases}$$

下面证明：对 $\forall(x,t)\in\mathbb{R}^2\times[0,\infty)$, 有 $u(x,t)=0$.

对 $\forall(x,t)\in\mathbb{R}^2\times[0,\infty)$, 取 $T>0$ 充分大，使 $(x,t)\in K$, 则由引理 2.6.6 可得

$$\iiint\limits_K u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0,$$

故由 u 的连续性可知，对 $\forall\,(x,t)\in K$, 有

$$u(x,t)=0,$$

从而由 (x,t) 的任意性可知，对 $\forall(x,t)\in\mathbb{R}^2\times[0,\infty)$, 有 $u(x,t)=0$.

另一方面，如果 u 是初值问题 (2.6.7) 的解，则对 $\forall\,\varepsilon>0$ 及充分大 $T>0$. 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{(3+2a^2)M_3(T)}+1}$, 当初始函数满足 $\|\varphi\|_{L^2(\Omega_0)}<\delta$、$\|\varphi_{x_1}\|_{L^2(\Omega_0)}<\delta$、$\|\varphi_{x_2}\|_{L^2(\Omega_0)}<\delta$、$\|\psi\|_{L^2(\Omega_0)}<\delta$ 及方程右端项满足 $\|f\|_{L^2(K)}<\delta$ 时，由引理 2.6.6 可得

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{L^2(K)}&=\iiint\limits_K u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\leqslant M_3(T)\left[\Omega_0(0)+\Omega(0)+\iiint\limits_{K_t}f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right]\\&\leqslant M_3(T)[\delta^2+\delta^2+2a^2\delta^2+\delta^2]<\varepsilon^2,\end{aligned}$$

即

$$\|u\|_{L^2(K)}<\varepsilon.$$

▌

上述各引理及定理 2.6.4 的结论对于 $n=1$ 及 $n=3$ 的情形也同样成立，请读者自行完成证明.

习题　2.6

2.6.1　两端固定的弦在阻尼介质中的微小横振动满足如下方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial t}=0,$$

其中 $\alpha>0$ 是常数. 证明其能量是减少的，并由此证明方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,t)$$

满足第一类边界条件的混合问题的解是唯一的.

2.6.2　一长为 l 的弦其一端固定，另一端受到与速度成正比的阻尼的作用，此时弦的横振动满足的边界条件为

$$u(x,0)=0,\quad\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=l}=0\quad(\alpha>0).$$

试证明此时弦在作自由微小横振动时能量是减少的，并由此证明弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)$$

满足上述边界条件的混合问题的解是唯一的.

2.6.3 设 v、w 均是弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad 0<x<l,\ t>0$$

的解，且 v、w 满足如下的边界条件

$$v(0,t)=v(l,t)=w(0,t)=w(l,t)=0.$$

试证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial t}+a^2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\right]=0\quad(t>0).$$

2.6.4 对由分离变量法求得的混合问题的解 (2.3.9), 试用系数 A_n 及 B_n $(n=1,2,\ldots)$ 来表示能量积分

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^l\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x.$$

2.6.5 考虑波动方程的混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\Delta u=0, & x\in\Omega,\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x),\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=0}=\psi(x), & x\in\overline{\Omega},\\ \left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}+\alpha u\right)\right|_{\Gamma}=0, & t\geqslant 0,\end{cases}$$

其中 $\alpha>0$ 是常数， $\boldsymbol{n}$ 为 Γ 的外法线方向.

设 u 为上述混合问题的解，定义能量积分

$$E(t)=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+a^2\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right]\mathrm{d}x+\frac{a^2\alpha}{2}\iint\limits_{\Gamma}u^2\mathrm{d}S,$$

试证明 $E(t)\equiv$ 常数，由此证明上述混合问题的解是唯一的.

2.6.6 设 u 是带一阶耗散项的波动方程混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\Delta u+\alpha\dfrac{\partial u}{\partial t}=0, & x\in\Omega,\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x),\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=0}=\psi(x), & x\in\overline{\Omega},\\ u\big|_{\Gamma}=0, & t\geqslant 0\end{cases}$$

的解，其中 $\alpha>0$ 为常数， $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为有界区域， Γ 为其边界. 试证明其总能量

$$E(t)=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+a^2\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right]\mathrm{d}x$$

随时间的增加而减少，由此证明上述混合问题的解是唯一的.

2.6.7 设有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 的边界 Γ 由两部分 Γ_0 及 Γ_1 组成 (Γ_1 非空), 考虑在 Γ_1 上给定耗散边界条件的混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0, \quad x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x=0} = \psi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \\ u\big|_{\Gamma_0} = 0, \quad \left(\alpha \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad t \geqslant 0. \end{cases}$$

其中 $\alpha > 0$ 是常数, $\boldsymbol{n}$ 表示 Γ_1 的外法线方向.

设 u 是上述混合问题的解, 试证明其总能量 $E(t)$ 随时间的增加而减少, 这里 $E(t)$ 的定义同习题 2.6.6, 由此证明这个混合问题的解是唯一的.

2.6.8 在具有障碍物的空间 $\mathbb{R}^3$ 中考虑声波的传播, 可归结为如下波动方程在外部区域中的混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega},\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \backslash it\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big|_{\Gamma} = 0, \quad t \geqslant 0, \end{cases}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中具有光滑边界 Γ 的有界区域, $\boldsymbol{n}$ 是 Γ 相对外部区域 $\mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}$ 的外法线方向.

对空间 $\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty)$ 中的任一点 (x, T) $(T > 0)$, 作过该点的特征锥与 $t = 0$ 所围成的锥形域 $K(T)$ 的截面 Ω_τ(可视为 $\mathbb{R}^3$ 中的有界区域), 即

$$\Omega_\tau = K(T) \cap \{(x,t) \mid t = \tau\} \quad (0 \leqslant \tau \leqslant T),$$

并记 $\widetilde{\Omega}_\tau = \Omega_\tau \cap (\mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega})$.

设 u 为此混合问题的解, 定义能量积分为

$$E(t) = \frac{1}{2} \iiint\limits_{\widetilde{\Omega}_t} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + a^2 \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right] \mathrm{d}x,$$

试证明 $E(t)$ 随时间增加而减少.

2.6.9 利用第 2.6.8 题的结果, 证明波动方程的混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x,t), \quad x \in \Omega',\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x=0} = \psi(x), \quad x \in \overline{\Omega'}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big|_{\Gamma} = g(x,t), \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$

的解是唯一的, 其中 Γ 为 $\mathbb{R}^3$ 中有界的光滑闭曲面, Ω' 为 Γ 的外部区域, $\boldsymbol{n}$ 为 Γ 相对外部区域 Ω' 的外法线方向.

第 3 章　抛物型方程

本章研究一类典型的抛物型方程，即热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f$$

的初值问题和混合问题，讨论了它们的求解方法 (分离变量法与 Fourier 变换方法) 与解的性质 (极值原理等). 作为工具，我们较系统地介绍了 Fourier 变换和 Laplace 变换及其运算性质.

3.1　Fourier 变换和 Laplace 变换

Fourier 变换和 Laplace 变换在偏微分方程的求解与理论研究中有着重要的应用， Fourier 变换是最常用的一种积分变换，其基本特性之一就是把微分运算转化为乘法运算，从而能把一个线性偏微分方程的问题转化为常微分方程的问题，甚至转化为函数方程问题. 当然， Fourier 变换的重要性远不止于此，它在其他应用科学，如信息论、光学、无线电技术等学科中都有极为广泛的应用，它是近代科学技术中的重要数学工具之一.

在这一节中，我们先介绍 Fourier 变换及其运算性质，然后介绍另一种形式的积分变换，即 Laplace 变换.

3.1.1　Fourier 积分和 Fourier 变换

在学习 Fourier 级数的时候，我们已经知道，一个以 $2l$ 为周期的函数 $f(x)$, 如果在 $[-l,l]$ 上分段光滑，且在间断点处

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) + f(x-\Delta x)}{2},$$

则在 $[-l,l]$ 上 $f(x)$ 可以展成 Fourier 级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

其中

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l} \displaystyle\int_{-l}^{l} f(\xi) \cos \frac{n\pi \xi}{l} \, \mathrm{d}\xi, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \\ b_n = \dfrac{1}{l} \displaystyle\int_{-l}^{l} f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} \, \mathrm{d}\xi, \quad n = 1, 2, \cdots, \end{cases}$$

并称其为 $f(x)$ 的 Fourier 系数.

令 $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$ $(n=0,1,2,\cdots)$, 利用 Euler 公式

$$e^{i\lambda_n x} = \cos\lambda_n x + i\sin\lambda_n x,$$

$f(x)$ 的 Fourier 级数可改写为复指数形式

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{i\lambda_n x} + c_{-n}e^{-i\lambda_n x}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\lambda_n x}.$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi)e^{-i\lambda_n \xi}\,d\xi, \quad n = 0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

或写为

$$f(x) = \frac{1}{2l}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\int_{-l}^{l} f(\xi)e^{-i\lambda_n\xi}\,d\xi\right]e^{i\lambda_n x}.$$

如果 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上有定义, 在任何有限区间 $(-l,l)$ 内有连续导数, 我们可构造周期函数

$$f_l(x) = \begin{cases} f(x), & x\in[-l,l), \\ f(x+2kl), & x\in[2kl-l,2kl+l), \quad k=\pm1,\pm2,\cdots. \end{cases}$$

显然有

$$f(x) = \lim_{l\to+\infty} f_l(x) \quad (\forall x\in\mathbb{R}),$$

从而

$$f(x) = \lim_{l\to+\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2l}\left[\int_{-l}^{l} f_l(\xi)e^{-i\lambda_n\xi}\,d\xi\right]e^{i\lambda_n x}.$$

记 $\Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n-1} = \frac{\pi}{l} = \Delta\lambda$, 如果 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 内绝对可积, 即 $f(x)\in L(\mathbb{R})$, 则可以证明, 当 $l\to+\infty$ 时, 有 $\Delta\lambda_n\to0$, 且

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta\lambda_n\to0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\int_{-l}^{l} f_l(\xi)e^{-i\lambda_n\xi}d\xi\right]e^{i\lambda_n x}\Delta\lambda_n \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi. \end{aligned}$$

注意到 $\sin\lambda(x-\xi)$ 和 $\cos\lambda(x-\xi)$ 关于 λ 分别是奇函数和偶函数, 利用 Euler 公式可将上式写成

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi. \tag{3.1.1}$$

定义 3.1.1 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上有定义, 如果对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 反常积分

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi$$

都收敛，则称其为 $f(x)$ 的 Fourier 积分，此时，称等式

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\mathrm{d}\xi$$

为 $f(x)$ 的 Fourier 积分公式.

应该指出，等式 (3.1.1) 的推导过程是不严格的，至于一个非周期函数 $f(x)$ 在什么条件下，可用 $f(x)$ 的 Fourier 积分公式来表示，有下面的 Fourier 积分定理.

引理 3.1.1 若 $f(x)$ 是区间 $[-2l,2l]$ 上的分段光滑函数，则对 $\forall\, x\in[-l,l]$, 有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-l}^{l}f(x+\xi)\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}\,\mathrm{d}\xi=\frac{\pi}{2}[f(x+0)+f(x-0)],$$

其中 $f(x\pm 0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}f(x\pm\Delta x)$.

证明 作函数

$$g_+(\xi)=\frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi},\quad g_-(\xi)=\frac{f(x+\xi)-f(x-0)}{\xi},$$

则由 $f(x)$ 在 $[-2l,2l]$ 上分段光滑可知，$g_+(\xi)$ 及 $g_-(\xi)$ 均在 $[-l,l]$ 上是分段连续的，故由 Riemann 引理可得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^l g_+(\xi)\sin\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi=0,\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-l}^0 g_-(\xi)\sin\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi=0,$$

从而由

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^l\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}\,\mathrm{d}\xi=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\lambda l}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned}f(x+\xi)\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}&=f(x+0)\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}+\frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}\sin\lambda\xi\\&=f(x+0)\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}+g_+(\xi)\sin\lambda\xi,\\f(x+\xi)\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}&=f(x-0)\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}+\frac{f(x+\xi)-f(x-0)}{\xi}\sin\lambda\xi\\&=f(x-0)\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}+g_-(\xi)\sin\lambda\xi\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^l f(x+\xi)\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}\,\mathrm{d}\xi&=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^l\left[f(x+0)\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}+g_+(\xi)\sin\lambda\xi\right]\mathrm{d}\xi\\&=\frac{\pi}{2}f(x+0),\end{aligned}$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-l}^{0} f(x+\xi)\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}\,\mathrm{d}\xi = \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-l}^{0}\left[f(x-0)\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}+g_-(\xi)\sin\lambda\xi\right]\mathrm{d}\xi$$
$$=\frac{\pi}{2}f(x-0).$$

将上两式左右两端分别相加可得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-l}^{l} f(x+\xi)\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}\,\mathrm{d}\xi = \frac{\pi}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$ ▌

若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积，当 $l=+\infty$ 时，引理 3.1.1 仍成立，证明留给读者.

定理 3.1.1 (Fourier 积分定理)

如果函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上分段光滑且绝对可积，则 $f(x)$ 的 Fourier 积分在 $\mathbb{R}$ 上每一点处都收敛于 $f(x)$, 即等式 (3.1.1) 成立，也就是 (在 Cauchy 主值意义下)

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{\nu\to+\infty}\int_0^{\nu}\left[\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\lambda.$$

证明 因为函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上分段光滑，所以对 $\forall\, x\in\mathbb{R}$, 取 $l>|x|$, 由引理 3.1.1 可得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(x+\xi)\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}\,\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=f(x),$$

从而由

$$\int_0^{\nu}\cos\lambda\xi\,\mathrm{d}\lambda=\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}\bigg|_0^{\nu}=\frac{\sin\nu\xi}{\xi}$$

可得

$$\begin{aligned}f(x)&=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(x+\xi)\frac{\sin\lambda\xi}{\xi}\,\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{\pi}\lim_{\nu\to+\infty}\int_{-l}^{l} f(x+\xi)\left[\int_0^{\nu}\cos\lambda\xi\,\mathrm{d}\lambda\right]\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{\pi}\lim_{\nu\to+\infty}\int_0^{\nu}\mathrm{d}\lambda\int_{-l}^{l} f(x+\xi)\cos\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

即

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-l}^{l} f(x+\xi)\cos\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi. \tag{3.1.2}$$

又因为 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积，所以存在 $c>0$, 使得

$$c=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x<+\infty$$

于是对 $\forall\, A > l$, 有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{\nu} \mathrm{d}\lambda \int_{-A}^{A} f(x+\xi)\cos\lambda\xi \mathrm{d}\xi - \int_0^{\nu} \mathrm{d}\lambda \int_{-l}^{l} f(x+\xi)\cos\lambda\xi \mathrm{d}\xi\right| \\
=&\left|\int_0^{\nu} \mathrm{d}\lambda \int_{-A}^{-l} f(x+\xi)\cos\lambda\xi \mathrm{d}\xi + \int_0^{\nu} \mathrm{d}\lambda \int_{l}^{A} f(x+\xi)\cos\lambda\xi \mathrm{d}\xi\right| \\
=&\left|\int_{-A}^{-l} f(x+\xi)\frac{\sin\nu\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi + \int_{l}^{A} f(x+\xi)\frac{\sin\nu\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi\right| \\
\leqslant& \int_{-A}^{-l} |f(x+\xi)|\left|\frac{\sin\nu\xi}{\xi}\right|\mathrm{d}\xi + \int_{l}^{A} |f(x+\xi)|\left|\frac{\sin\nu\xi}{\xi}\right|\mathrm{d}\xi \\
\leqslant& \frac{1}{l}\left[\int_{-A}^{-l} |f(x+\xi)|\mathrm{d}\xi + \int_{l}^{A} |f(x+\xi)|\mathrm{d}\xi\right] \leqslant \frac{c}{l}.
\end{aligned}$$

综上可知，对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 取 $l > \max\left\{\frac{c}{\varepsilon},\ |x|\right\}$, 当 $A > l$ 时，在上式中，固定 ν, 同时令 $A \to +\infty$, 再令 $\nu \to +\infty$, 并利用式 (3.1.2) 可得

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\xi)\cos\lambda\xi\, \mathrm{d}\xi - f(x)\right| < \varepsilon,$$

从而由

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\xi)\cos\lambda\xi \mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)\mathrm{d}\xi$$

及 ε 的任意性可得

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)\mathrm{d}\xi.$$

∎

利用 Euler 公式可得如下推论.

推论 3.1.1 设 $f(x)$ 满足定理 3.1.1 的条件，则有

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\xi}\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda.$$

定义 3.1.2 设 $f(x) \in L(\mathbb{R})$, 称 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x$ 为 $f(x)$ 的 Fourier 变换，记为 $\mathcal{F}[f(x)]$ 或 $\widehat{f}(\lambda)$, 即

$$\mathcal{F}[f(x)] = \widehat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x,$$

称 $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x$ 为 $f(x)$ 的 Fourier 逆变换，记为 $\mathcal{F}^{-1}[f(x)]$, 即

$$\mathcal{F}^{-1}[f(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x.$$

由定理 3.1.1 的推论 3.1.1 便得到下面的定理.

定理 3.1.2 如果函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积且分段光滑, 则 $f(x)$ 的 Fourier 变换存在, 且此变换的逆变换为 $f(x)$, 即

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}(\lambda)] = \mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[f(x)]\big].$$

例 3.1.1 求 $f(x)$ 的 Fourier 变换 $\widehat{f}(\lambda)$, 其中

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant l, \\ 0, & |x| > l. \end{cases}$$

解 由 Fourier 变换的定义, 得

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\xi}\mathrm{d}\xi = \int_{-l}^{l} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\xi}\mathrm{d}\xi = \int_{-l}^{l} \cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi = \frac{2\sin\lambda l}{\lambda}.$$

例 3.1.2 求 $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$ 的 Fourier 变换.

解 由 Fourier 变换的定义, 得

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|\xi|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\xi}\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\xi(1-\mathrm{i}\lambda)}\mathrm{d}\xi + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi(1+\mathrm{i}\lambda)}\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi(1-\mathrm{i}\lambda)}\mathrm{d}\xi + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi(1+\mathrm{i}\lambda)}\mathrm{d}\xi \\ &= 2\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi}\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi = \frac{2}{1+\lambda^2}.\end{aligned}$$

3.1.2 Laplace 变换

在热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\Big)$$

中, 用 $-t$ 代替 t 时, 方程不再保持原来的形式 (这和波动方程不同). 这说明热传导方程描述的是所谓 "不可逆" 过程, 它把过去的状态和将来的状态区分开来. 由于这个原因, 我们只讨论 $t \geqslant 0$ 时的温度函数 $u(x_1, x_2, x_3, t)$ 的性质.

Laplace 变换是对于只在 $t \geqslant 0$ 时有定义的函数 $f(t)$ 施行的一种积分变换.

设 $f(t)$ 为定义 $[0, +\infty)$ 上的连续函数, 令

$$f_1(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-bt}f(t), & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

并假设 $f_1(t)$ 是可以进行 Fourier 变换的, 则根据 Fourier 积分公式有

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\xi}\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}\lambda.$$

故当 $t \geqslant 0$ 时，有

$$f(t) = \frac{e^{bt}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} f(\xi)e^{-(b+i\lambda)\xi}d\xi\right]e^{i\lambda}d\lambda$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} f(\xi)e^{-(b+i\lambda)\xi}d\xi\right]e^{(b+i\lambda)t}d\lambda,$$

从而令 $s = b + i\lambda$ 可得

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \widetilde{f}(s)e^{st}ds,$$

其中

$$\widetilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} f(\xi)e^{-s\xi}d\xi.$$

从上面的两个表达式可得出 $f(t)$ 与 $\widetilde{f}(s)$ 可以互相用一种积分来表示，其中积分变量 s 可取复值. 下面讨论右端的广义积分在什么条件下收敛，在什么条件下等式成立.

定理 3.1.3 如果 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有定义且满足条件:

(1) $f(t)$ 在 $t \geqslant 0$ 的任一有限区间上分段连续,

(2) 当 $t \to +\infty$ 时, $f(t)$ 增长速度不超过某一个指数型的函数，即存在常数 $M > 0$ 和 $r_0 \geqslant 0$ (称 r_0 为 $f(t)$ 的增长指数), 使得

$$|f(t)| \leqslant Me^{r_0 t}, \quad 0 \leqslant t < +\infty,$$

则函数

$$\widetilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} f(\xi)e^{-s\xi}d\xi$$

在半平面 $\mathrm{Re}\, s = r > r_0$ 内收敛，并且 $\widetilde{f}(s)$ 在此半平面内是解析的.

证明 由条件 (1) 可知，对 $\forall A > 0$ 及 $\forall s \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ 复数集), 积分 $\int_0^A f(t)e^{-st}dt$ 存在. 并且当 $t \geqslant 0$ 时，由条件 (2) 可得

$$|f(t)e^{-st}| \leqslant Me^{r_0 t}e^{-(\mathrm{Re}\, s)t} = Me^{-(r-r_0)t},$$

故当 $r = \mathrm{Re}\, s > r_0$ 时，有

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}|dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-(r-r_0)t}dt < +\infty,$$

从而积分 $\int_0^{+\infty} f(\xi)e^{-s\xi}d\xi$ 在半平面 $r = \mathrm{Re}\, s > r_0$ 内绝对收敛.

另一方面，由条件 (2) 可得

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[f(t)\mathrm{e}^{-st}]\right| = |-tf(t)\mathrm{e}^{-st}| \leqslant Mt\mathrm{e}^{-(r-r_0)t}.$$

于是

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[f(t)\mathrm{e}^{-st}]\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} Mt\mathrm{e}^{-(r-r_0)t}\mathrm{d}t < +\infty,$$

即积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[f(t)\mathrm{e}^{-st}]\mathrm{d}t$ 也在半平面 $r = \mathrm{Re}\, s > r_0$ 内绝对收敛.

综上可知，$\widetilde{f}(s)$ 在半平面 $r = \mathrm{Re}\, s > r_0$ 内有定义且解析. ▌

定理 3.1.4 如果 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，$f'(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上分段连续，且满足定理 3.1.4 的条件 (2), 则当 $t>0$ 时，有

$$f(t) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{r-\mathrm{i}N}^{r+\mathrm{i}N}\widetilde{f}(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{r-\mathrm{i}\infty}^{r+\mathrm{i}\infty}\widetilde{f}(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s;$$

当 $t<0$ 时，有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{r-\mathrm{i}N}^{r+\mathrm{i}N}\widetilde{f}(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{r-\mathrm{i}\infty}^{r+\mathrm{i}\infty}\widetilde{f}(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s = 0,$$

其中 $\widetilde{f}(s)$ 与定理 3.1.3 中相同，积分是沿任一直线 $r = \mathrm{Re}\, s > r_0$ 进行的，并且把积分看成主值积分.

证明 引入记号

$$f_N(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{r-\mathrm{i}N}^{r+\mathrm{i}N}\widetilde{f}(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{r-\mathrm{i}N}^{r+\mathrm{i}N}\left[\int_0^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{-s\xi}\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s.$$

对 $\varepsilon>0$, 由积分 $\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ 在 $\mathrm{Re}\, s \geqslant r_0+\varepsilon > r_0$ 上关于 s 一致收敛可得

$$\begin{aligned}f_N(t) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}f(\xi)\left[\int_{r-\mathrm{i}N}^{r+\mathrm{i}N}\mathrm{e}^{s(t-\xi)}\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}\xi\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{r(t-\xi)}\frac{\sin N(t-\xi)}{t-\xi}\,\mathrm{d}\xi\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-t}^{+\infty}f(\eta+t)\mathrm{e}^{-r\eta}\frac{\sin N\eta}{\eta}\,\mathrm{d}\eta.\end{aligned}$$

令 $g(\eta) = f(\eta+t)\mathrm{e}^{-r\eta}$, 当 $\eta \geqslant t$ 时，$g(\eta)$ 关于 η 连续，$g'(\eta)$ 关于 η 除去有限个第一类不连续点外处处连续，由引理 3.1.1 可知，当 $t>0$ 时，有

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}f_N(t) &= \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{+\infty}g(\eta)\frac{\sin N\eta}{\eta}\,\mathrm{d}\eta + \int_{-t}^{0}g(\eta)\frac{\sin N\eta}{\eta}\,\mathrm{d}\eta\right]\\ &= \frac{1}{2}[g(0)+g(0)] = f(t),\end{aligned}$$

即

$$f(t)=\lim_{N\to+\infty}f_N(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{r+\mathrm{i}\infty}^{r-\mathrm{i}\infty}\widetilde{f}(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s\ \text{(Cauchy 主值意义下)};$$

当 $t<0$ 时，令 $\tau=-t>0$, 得

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}f_N(t)&=\frac{1}{\pi}\lim_{N\to+\infty}\left[\int_0^{+\infty}g(\eta)\frac{\sin N\eta}{\eta}\mathrm{d}\eta-\int_0^{\tau}g(\eta)\frac{\sin N\eta}{\eta}\mathrm{d}\eta\right]\\&=\frac{1}{2}[g(0)-g(0)]=0,\end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{r+\mathrm{i}\infty}^{r-\mathrm{i}\infty}\widetilde{f}(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s=\lim_{N\to+\infty}f_N(t)=0.$$

∎

定义 3.1.3 设 $f(t)$ 满足定理 3.1.4 的条件, 称 $\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ 为 $f(t)$ 的 Laplace 变换，记为 $\mathcal{L}[f(t)]$ 或 $\widetilde{f}(s)$, 即

$$\mathcal{L}[f(t)]=\widetilde{f}(s)=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t.$$

称 $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{r-\mathrm{i}\infty}^{r+\mathrm{i}\infty}\widetilde{f}(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$ 为 $\widetilde{f}(s)$ 的 Laplace 逆变换，记为 $\mathcal{L}^{-1}[\widetilde{f}(s)]$, 即

$$\mathcal{L}^{-1}[\widetilde{f}(s)]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{r-\mathrm{i}\infty}^{r+\mathrm{i}\infty}\widetilde{f}(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s,$$

其中 $\mathrm{Re}\,s=r>r_0\geqslant 0$.

由定义 3.1.3 可知，如果 $f(t)$ 满足定理 3.1.4 的条件，则当 $t>0$ 时，有

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[\widetilde{f}(s)]=\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f(t)]].$$

此时 $\widetilde{f}$ 称为 $f(t)$ 的像， $f(t)$ 称为 $\widetilde{f}$ 的原像.

例 3.1.3 求下列函数的 Laplace 变换：

(1) $f(t)=c$ (c 为实常数);　　(2) $f(t)=\mathrm{e}^{at}$ (a 为实常数);

(3) $f(t)=t^2$;　　(4) $\cos\omega t$ (ω 为实常数).

解 (1) 由 Laplace 变换的定义，得

$$\mathcal{L}[c]=\int_0^{+\infty}c\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\left.\frac{c\mathrm{e}^{-st}}{s}\right|_0^{+\infty}=\frac{c}{s}\quad(\mathrm{Re}\,s>0).$$

(2) 由 Laplace 变换的定义，得

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{at}]=\int_0+\infty\mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\left.\frac{\mathrm{e}^{-(s-a)t}}{s-a}\right|_0^{+\infty}=\frac{1}{s-a}\quad(\mathrm{Re}\,s>a).$$

(3) 由 Laplace 变换的定义，并利用分部积分得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t^2] &= \int_0^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{t^2\mathrm{e}^{-st}}{s}\right]\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} 2t\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{2t\mathrm{e}^{-st}}{s^2}\right]\Big|_0^{+\infty} + \frac{2}{s^2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \frac{2}{s^3} \quad (\mathrm{Re}\, s > 0).\end{aligned}$$

(4) 由 Laplace 变换的定义，并利用分部积分得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos\omega t] &= \int_0^{+\infty} \cos\omega t \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{\cos\omega t\mathrm{e}^{-st}}{s}\right]\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} \omega\mathrm{e}^{-st}\sin\omega t\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{s} + \left[\frac{\omega\mathrm{e}^{-st}\sin\omega t}{s^2}\right]\Big|_0^{+\infty} - \frac{\omega}{s^2}\int_0^{+\infty} \omega\mathrm{e}^{-st}\cos\omega t\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{s} - \frac{\omega^2}{s^2}\mathcal{L}[\cos\omega t] \quad (\mathrm{Re}\, s > 0),\end{aligned}$$

从而

$$\mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad (\mathrm{Re}\, s > 0).$$

3.1.3 Fourier 变换和 Laplace 变换的基本性质

在讨论下列基本性质时，总是假设所涉及函数的 Fourier 变换和 Laplace 变换及其逆变换是存在的，其中常数在没有特别说明时可以是复数.

由积分的线性性质可得

性质 3.1.1 (线性性质) Fourier 变换和 Laplace 变换都是线性变换，即对任意两个函数 f 和 g 以及任意常数 a 和 b, 都有

$$\mathcal{F}[af+bg] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g], \quad \mathcal{L}[af+bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g].$$

性质 3.1.2 (相似性质) 对任意的函数 f 及实常数 c, 都有

$$\mathcal{F}[f(cx)] = \frac{1}{|c|}\hat{f}\left(\frac{\lambda}{c}\right) \quad (c \neq 0),$$

$$\mathcal{L}[f(ct)] = \frac{1}{c}\tilde{f}\left(\frac{s}{c}\right) \quad (c > 0).$$

证明 令 $\eta = cx$, 则当 $c > 0$ 时，有

$$\mathcal{F}[f(cx)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(cx)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\lambda}{c}\eta}\mathrm{d}\eta = \frac{1}{c}\hat{f}\left(\frac{\lambda}{c}\right),$$

当 $c<0$ 时，有

$$\mathcal{F}[f(cx)] = -\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta)e^{-i\frac{\lambda}{c}\eta}d\eta = -\frac{1}{c}\widehat{f}\left(\frac{\lambda}{c}\right),$$

从而

$$\mathcal{F}[f(cx)] = \frac{1}{|c|}\widehat{f}\left(\frac{\lambda}{c}\right) \quad (c \neq 0).$$

另一方面，令 $\eta = ct$, 由 $c>0$ 可得

$$\mathcal{L}[f(ct)] = \int_0^{+\infty} f(ct)e^{-st}dt = \frac{1}{c}\int_0^{+\infty} f(\eta)e^{-\frac{s}{c}\eta}d\eta = \frac{1}{c}\widetilde{f}\left(\frac{s}{c}\right).$$

性质 3.1.3 (位移性质) 对任意的函数 f 及实常数 c, 有

$$\mathcal{F}[f(x-c)] = e^{-i\lambda c}\mathcal{F}[f(x)],$$

$$\mathcal{L}[e^{ct}f(t)] = \widetilde{f}(s-c).$$

证明 令 $\eta = \xi - c$, 则有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(x-c)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi-c)e^{-i\lambda\xi}d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta)e^{-i\lambda(\eta+c)}d\eta \\ &= e^{-i\lambda c}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta)e^{-i\lambda\eta}d\eta = e^{-i\lambda c}\mathcal{F}[f(x)].\end{aligned}$$

另一方面，由 Laplace 变换的定义，得

$$\mathcal{L}[e^{ct}f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{ct}f(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(s-c)t}dt = \widetilde{f}(s-c).$$

性质 3.1.4 (微分性质)

(1) 如果 $f(x),\ f'(x) \in L(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, 则

$$\mathcal{F}[f'(x)] = i\lambda\mathcal{F}[f(x)];$$

(2) 如果 $f(t)$ 和 $f'(t)$ 均满足定理 3.1.4 的条件，则有

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0).$$

证明 (1) 由 $f(x),\ f'(x) \in L(\mathbb{R})$ 及 $|e^{-i\lambda x}| = 1$, 容易推出

$$\lim_{x\to\infty} f(x)e^{-i\lambda x} = 0,$$

从而 $f(x),\ f'(x) \in L(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, 并利用分部积分可得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'(x)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-i\lambda x}dx \\ &= [f(x)e^{-i\lambda x}]\Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx = i\lambda\mathcal{F}[f(x)].\end{aligned}$$

(2) 由 $f(t)$ 和 $f'(t)$ 均满足定理 3.1.4 的条件可知，当 $\operatorname{Re} s > r_0 \geqslant 0$ 时，有

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st} = 0,$$

于是利用分部积分可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\ &= \left[f(t)\mathrm{e}^{-st}\right]\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0).\end{aligned}$$

一般地，如果 $f(x)$, $f^{(k)}(x) \in L(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$, 则有

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (\mathrm{i}\lambda)^n \mathcal{F}[f(x)],$$

特别地，当 $n = 2$ 时，有

$$\mathcal{F}[f''(x)] = -\lambda^2 \mathcal{F}[f(x)].$$

如果 $f(t)$, $f^{(k)}(t)$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 均满足定理 3.1.4 的条件，则有

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\left\{\mathcal{L}[f(t)] - \frac{f(0)}{s} - \frac{f'(0)}{s^2} - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{s^n}\right\}.$$

性质 3.1.5 (乘多项式性质)

(1) 如果 $f(x)$, $xf(x) \in L(\mathbb{R})$, 则有

$$\mathcal{F}[xf(x)] = \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\widehat{f}(\lambda);$$

(2) 如果 $f(t)$ 满足定理 3.1.4 的条件，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\widetilde{f}(s) = \mathcal{L}[-tf(t)] \quad (\operatorname{Re} s > r_0).$$

一般地，如果 $f(x)$, $x^k f(x) \in L(\mathbb{R})$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$, 则有

$$\mathcal{F}[x^k f(x)] = \mathrm{i}^k\,\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda^k}\widehat{f}(\lambda).$$

性质 3.1.6 (积分性质)

(1) 如果 $f(x) \in L(\mathbb{R})$, 则有

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right] = -\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\mathcal{F}[f(x)];$$

(2) 如果 $f(t)$ 满足定理 3.1.4 的条件，则有

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{s}\,\widetilde{f}(s).$$

证明 (1) 由 $f(x)$ 满足定理 3.1.1 的条件可知，积分上限函数可导，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi = f(x),$$

于是由性质 3.1.3 可得

$$\mathcal{F}[f(x)] = \mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right] = \mathrm{i}\lambda\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right],$$

即

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right] = \frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\mathcal{F}[f(x)].$$

(2) 令 $h(t) = \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$, 则由 $f(t)$ 满足定理 3.1.4 的条件可知， $h'(t) = f(t)$ 且 $h(0) = 0$, 于是由性质 3.1.3 可得

$$\mathcal{L}[h'(t)] = s\mathcal{L}[h(t)] - h(0) = s\mathcal{L}[h(t)],$$

即

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{s}\widetilde{f}(s).$$ ▌

由于 Laplace 逆变换是一个复变函数的积分，计算复变函数的积分通常比较困难，但当 $\widetilde{f}(s)$ 满足一定条件时，可用残数方法来计算，下面的定理将提供一种计算方法.

定理 3.1.5 如果 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 是 $\widetilde{f}(s)$ 的所有奇点，且 $\lim\limits_{s\to\infty}\widetilde{f}(s) = 0$, 则有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{r-\mathrm{i}\infty}^{r+\mathrm{i}\infty}\widetilde{f}(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s = \sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{s=s_k}[\widetilde{f}(s)\mathrm{e}^{st}],$$

其中适当选取 $r > 0$, 使得 $\mathrm{Re}\,s_k < r\ (k = 1, 2, \cdots, n)$.

此定理的证明读者可参阅由高等教育出版社出版、南京工学院 (现东南大学) 数学教研组编写的《积分变换》一书.

例 3.1.4 设 $f(x) = \mathrm{e}^{-\beta x^2}\ (\beta > 0)$, 求 $\widehat{f}(\lambda)$.

解 由 Fourier 变换的定义及分部积分公式，得

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta x^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\mathrm{e}^{-\beta x^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\right]\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2\beta\mathrm{i}}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-\beta x^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\\ &= -\frac{2\beta}{\lambda}\mathcal{F}[-\mathrm{i}x\mathrm{e}^{-\beta x^2}],\end{aligned}$$

故由性质 3.1.5 可得

$$\widehat{f}(\lambda) = -\frac{2\beta}{\lambda}\mathcal{F}[-\mathrm{i}x\mathrm{e}^{-\beta x^2}] = -\frac{2\beta}{\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\widehat{f}(\lambda),$$

于是 $\widehat{f}(\lambda)$ 作为 λ 的函数满足下面的常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\widehat{f}(\lambda) = -\dfrac{\lambda}{2\beta}\widehat{f}(\lambda), \\ \widehat{f}(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\beta x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}, \end{cases}$$

解得

$$\widehat{f}(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{4\beta}}.$$

定义 3.1.4 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在实数集 $\mathbb{R}$ 上有定义，如果积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi$$

对所有的 $x\in\mathbb{R}$ 都收敛，则称该积分为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的卷积，记为 $(f*g)(x)$，简记为 $f*g$，即

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

定义 3.1.5 设函数 $f(t)$ 与 $g(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有定义，如果积分

$$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau$$

对所有的 $t\in[0,+\infty)$ 都存在，则称该积分为 $f(t)$ 和 $g(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的卷积，也记为 $(f*g)(t)$，简记为 $f*g$，即

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

这里需注意，上面两种卷积的符号相同，但对象和定义有差别，在使用时应小心。由积分性质易推得卷积的下列性质：

(1) 卷积满足交换律，即 $f*g=g*f$；

(2) 卷积满足结合律，即 $f*(g*h)=(f*g)*h$；

(3) 卷积满足分配律，即 $f*(g+h)=f*g+f*h$.

定理 3.1.6 (卷积定理)

如果 $f(x), g(x)\in L(\mathbb{R})\cap C(\mathbb{R})$，则

$$\mathcal{F}[f*g]=\mathcal{F}[f]\cdot\mathcal{F}[g],\quad \mathcal{F}[f\cdot g]=\frac{1}{2\pi}\widehat{f}*\widehat{g},\quad \mathcal{L}[f*g]=\mathcal{L}[f]\cdot\mathcal{L}[g].$$

证明 仅以 Fourier 变换为例，证明第一个等式.

事实上，令 $\eta = x - \xi$, 由 $f * g$ 满足 Fourier 变换条件可得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[(f*g)(x)] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\xi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-\xi)}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\xi\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\xi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\eta}\mathrm{d}\eta\right]\mathrm{d}\xi\\ &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\xi}\mathrm{d}\xi\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\eta}\mathrm{d}\eta\right],\end{aligned}$$

从而

$$\mathcal{F}[(f*g)(x)] = \mathcal{F}[f(x)]\cdot\mathcal{F}[g(x)].$$ ∎

对于 n 个自变量的函数 $f(x) = f(x_1, \cdots, x_n)$, 也可类似地定义 Fourier 变换为

$$\mathcal{F}[f(x)] = \widehat{f}(\lambda) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}}_{n\ \text{个}} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle\lambda,x\rangle}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n;$$

定义 $f(\lambda) = \widehat{f}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 的 Fourier 逆变换为

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}(\lambda)] = \frac{1}{(2\pi)^n}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}}_{n\ \text{个}} \widehat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle\lambda,x\rangle}\mathrm{d}\lambda_1\cdots\mathrm{d}\lambda_n,$$

其中

$$\langle\lambda, x\rangle = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

对于 n 元函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的 Fourier 变换，上述性质及定理关于 Fourier 变换的结论也同样成立，只需要把在性质及定理中出现的表达式作如下修改:

$$\mathcal{F}[f(x_1 - c_1, \cdots, x_n - c_n)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_n c_n)}\mathcal{F}[f(x_1, x_2, \cdots, x_n)];$$

$$\mathcal{F}[f(cx_1, \cdots, cx_n)] = \frac{1}{|c|^n}\widehat{f}\left(\frac{\lambda_1}{c}, \cdots, \frac{\lambda_n}{c}\right);$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}f(x_1, \cdots, x_n)\right] = \mathrm{i}\lambda_j\mathcal{F}[f(x_1, \cdots, x_n)].$$

关于卷积的表达式如下:

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi_1\cdots\mathrm{d}\xi_n,$$

$$\mathcal{F}[(f*g)(x)] = \mathcal{F}[f(x)]\cdot\mathcal{F}[g(x)],$$

其中 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$, $x - \xi = (x_1 - \xi_1, \cdots, x_n - \xi_n)$.

对于 n 元函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的 Laplace 变换，也有类似上述的结论.

习题　3.1

3.1.1　设 $a>0$ 为实常数，求下列函数的 Fourier 变换：

(1) $f(x)=\mathrm{e}^{-ax^2}$；　　(2) $f(x)=\dfrac{\sin ax}{x}$；

(3) $f(x)=\sin x^2$；　　(4) $f(x)=\cos x^2$；

(5) $f(x)=\begin{cases}|x|, & |x|<a,\\ 0, & |x|\geqslant a>0.\end{cases}$

3.1.2　设 $a>0$, $\omega>0$ 为实常数，求下列函数的 Laplace 变换：

(1) $f(t)=\dfrac{t^n}{n!}$；　　(2) $f(t)=\dfrac{\sin at}{t}$；

(3) $f(t)=\dfrac{t^2\mathrm{e}^{at}}{2!}$；　　(4) $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$；

(5) $f(t)=\sqrt{t}$；　　(6) $f(t)=\cosh at$；

(7) $f(t)=t\cosh t$；　　(8) $f(t)=t\sinh t$；

(9) $f(t)=\mathrm{e}^{at}\sin\omega t$；　　(10) $f(t)=\mathrm{e}^{at}\cos\omega t$.

3.1.3　求下列函数的 Laplace 逆变换：

(1) $\widetilde{f}(s)=\dfrac{s}{(s^2+1)(s^2+2)}$；　　(2) $\widetilde{f}(s)=\dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+2)}$；

(3) $\widetilde{f}(s)=\dfrac{1}{(s-1)(s-2)}$；　　(4) $\widetilde{f}(s)=\dfrac{1}{s(s+1)^2}$；

(5) $\widetilde{f}(s)=\dfrac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$；　　(6) $\widetilde{f}(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$.

3.1.4　证明：如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足定理 3.1.3 的条件，则有

$$\mathcal{L}[f*g(x)]=\mathcal{L}[f(x)]\cdot\mathcal{L}[g(x)].$$

3.1.5　证明

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2x^2}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a^2}},$$

其中 $a>0$ 为实常数.

3.2　初值问题　半无界域上的混合问题

本节将介绍用 Fourier 变换和 Laplace 变换解初值问题和半无界域上的混合问题的方法.

3.2.1　用 Fourier 变换解初值问题

以一维热传导方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}\end{cases}\tag{3.2.1}$$

为例，介绍用 Fourier 变换解初值问题的方法.

假设 $u(x,t)$、$u_x(x,t)$、$u_{xx}(x,t)$、$f(x,t)$ 及 $\varphi(x)$ 关于变量 x 可以进行 Fourier 变换，并引入记号

$$\mathcal{F}[u(x,t)]=\widehat{u}(\lambda,t),\quad \mathcal{F}[f(x,t)]=\widehat{f}(\lambda,t),\quad \mathcal{F}[\varphi(x)]=\widehat{\varphi}(\lambda).$$

为求解初值问题 (3.2.1), 首先对方程及初始值两端关于变量 x 进行 Fourier 变换，并利用微分性质，可得到以 λ 为参数、t 为自变量、$\widehat{u}(\lambda,t)$ 为未知函数的常微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\widehat{u}(\lambda,t)}{\mathrm{d}t}=-a^2\lambda^2\widehat{u}(\lambda,t)+\widehat{f}(\lambda,t),\\ \widehat{u}(\lambda,0)=\widehat{\varphi}(\lambda),\end{cases}$$

解该初值问题，得

$$\widehat{u}(\lambda,t)=\widehat{\varphi}(\lambda)\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2t}+\int_0^t\widehat{f}(\lambda,\tau)\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau,$$

再对 $\widehat{u}(\lambda,t)$ 进行 Fourier 逆变换，利用卷积定理，关于变量 x 作卷积可得

$$u(x,t)=\varphi(x)*\mathcal{F}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2t}\right]+\int_0^t f(x,\tau)*\mathcal{F}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\right]\mathrm{d}\tau.$$

令 $\beta=\dfrac{1}{4a^2t}$, 由例 3.1.4 可得

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2t}\right]=\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right]\right]=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}},$$

于是

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \tag{3.2.2}$$

表达式 (3.2.2) 是在假设前面各种运算都可以进行的情况下得到的，它称为初值问题 (3.2.1) 的形式解.

类似可得，二维热传导方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\left(\dfrac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial x_2^2}\right)=f(x_1,x_2,t),\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ t>0,\\ u(x_1,x_2,0)=\varphi(x_1,x_2),\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\end{cases} \tag{3.2.3}$$

的形式解为

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\frac{1}{4a^2\pi t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi\\&+\frac{1}{4a^2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{t-\tau}\mathrm{e}^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

其中 $\xi=(\xi_1,\xi_2)$, $|x-\xi|^2=(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2$, $\mathrm{d}\xi=\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2$.

三维热传导方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\Delta=f(x,t), & x\in\mathbb{R}^3,\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}^3\end{cases}\tag{3.2.5}$$

的形式解为

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\frac{1}{(4a^2\pi t)^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi\\&+\frac{1}{(4a^2\pi)^{3/2}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{3.2.6}$$

其中 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, $|x-\xi|^2=\sum\limits_{i=1}^{3}(x_i-\xi_i)^2$, $\mathrm{d}\xi=\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_3$.

通常称表达式 (3.2.2) 、 (3.2.4) 和 (3.2.6) 为 Poisson 公式，由 Poisson 公式可以看出，函数 $\dfrac{1}{(4a^2\pi t)^{\frac{n}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}$ 对 n 维热传导方程起着重要作用，这里 $n=1,2,3$. 为此引入函数

$$K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{(4a^2\pi t)^{\frac{n}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}} & x\in\mathbb{R}^n,\ t>0,\\ 0, \quad x\in\mathbb{R}^n,\ t\leqslant 0,\end{cases}$$

称函数 $\Gamma(x,t;\xi,\tau)=K(x-\xi,t-\tau)$ 为热传导方程的基本解.

利用热传导方程的基本解，可将 n 维热传导方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\Delta u=f(x,t), & x\in\mathbb{R}^n,\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x), x\in\mathbb{R}^n\end{cases}$$

的形式解统一表示为

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}K(x-\xi,t)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}K(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.$$

其中对 ξ 积分为 n 重积分， $|x-\xi|^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\xi_i)^2$.

下面以一维热传导方程为例，证明在一定条件下，初值问题 (3.2.1) 的形式解 (3.2.2) 就是古典解.

定理 3.2.1 如果函数 $\varphi(x)\in C(\mathbb{R})$ 且有界， $f(x,t)\equiv 0$, 则由式 (3.2.2) 确定的函数 $u(x,t)$ 是初值问题 (3.2.1) 的有界解.

证明 当 $t>0$ 时，由于 $f(x,t)\equiv 0$, 并利用基本解可将式 (3.2.2) 写成

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(x-\xi,t)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi.\tag{3.2.7}$$

1° 证明：函数 $K(x-\xi,t)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-\xi,t)\,\mathrm{d}\xi = \begin{cases} 1, & x\in\mathbb{R},\ t>0, \\ 0, & x\in\mathbb{R},\ t\leqslant 0. \end{cases}$$

事实上，当 $t\leqslant 0$ 时，由 $K(x-\xi,t)\equiv 0$ 可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-\xi,t)\,\mathrm{d}\xi = 0.$$

当 $t>0$ 时，作变换 $\xi = x+2a\sqrt{t}\,\eta$, 则由 $\mathrm{d}\xi = 2a\sqrt{t}\,\mathrm{d}\eta$ 可得

$$K(x-\xi,t)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{(4a^2\pi t)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta,$$

从而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-\xi,t)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta = 1.$$

2° 证明：积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-\xi,t)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$ 在 $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$ 上绝对收敛.

事实上，由 $\varphi(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界可知，存在常数 $M>0$, 使

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|\leqslant M,$$

故由 1° 可得

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-\xi,t)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\right| \leqslant M\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-\xi,t)\mathrm{d}\xi = M,$$

即积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-\xi,t)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$ 在 $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$ 上绝对收敛，从而由式 (3.2.7) 确定的函数 $u(x,t)$ 在 $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$ 上有定义且有界.

3° 证明：对 $\forall\, t_1,\ t_2\ (t_2>t_1>0)$, 积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial K}{\partial t}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$ 与 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$ 在 $\mathbb{R}\times[t_1,t_2]$ 上都一致收敛.

事实上，对 $\forall\,(x,t)\in\mathbb{R}\times[t_1,t_2]$, 将 $K(x-\xi,t)$ 关于 t 求偏导数得

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\right] \\ &= -\frac{1}{4at\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}},\end{aligned}$$

故由 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 可得

$$\left|\frac{\partial K}{\partial t}\right| = \left|-\frac{1}{4at\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{4at_1\sqrt{\pi t_1}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t_2}} + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t_1}}\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t_1^2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t_2}}$$

$$= \frac{\sqrt{t_2}}{2\sqrt{t_1^3}}K(x-\xi,t_2) + \frac{\sqrt{t_2^3}}{\sqrt{t_1^5}}\Big[\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t_2}K(x-\xi,t_2)\Big],$$

并由 $\varphi(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界可知，存在常数 $M>0$, 使得

$$\frac{\sqrt{t_2}}{2\sqrt{t_1^3}} + \frac{\sqrt{t_2^3}}{\sqrt{t_1^5}} + \sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)| \leqslant M,$$

从而

$$\Big|\frac{\partial K}{\partial t}\varphi(\xi)\Big| \leqslant M^2\Big[K(x-\xi,t_2) + \frac{(x-\xi)^2}{4a^2t_2}K(x-\xi,t_2)\Big].$$

另一方面，作变量替换 $\xi = x + 2a\sqrt{t_2}\,\eta$, 并利用

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\eta^2\mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta = \Big[-\frac{\eta}{2}\mathrm{e}^{-\eta^2}\Big]\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t_2}K(x-\xi,t_2)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\eta^2\mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta = \frac{1}{2},$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Big|\frac{\partial K}{\partial t}\varphi(\xi)\Big|\mathrm{d}\xi \leqslant M^2\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[K(x-\xi,t_2) + \frac{(x-\xi)^2}{4a^2t_2}K(x-\xi,t_2)\Big]\mathrm{d}\xi$$

$$= M^2\Big(1+\frac{1}{2}\Big) = \frac{3M^2}{2},$$

从而积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial K}{\partial t}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$ 在 $\mathbb{R}\times[t_1,t_2]$ 上一致收敛，且绝对收敛.

同理可知，积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$ 在 $\mathbb{R}\times[t_1,t_2]$ 上一致收敛，且绝对收敛.

4° 证明：由式 (3.2.7) 确定的函数 $u(x,t)$ 满足初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x\in\mathbb{R},\ t\geqslant 0,\\ u(x,0) = \varphi(x), & x\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

事实上，由 3° 的结论可知，$u(x,t)$ 可在积分号下对 x 求二阶偏导数，对 t 求一阶偏导数，且容易验证

$$\frac{\partial K(x-\xi,t)}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 K(x-\xi,t)}{\partial x^2} = 0.$$

于是当 $t>0$ 时，有

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\frac{\partial K(x-\xi,t)}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 K(x-\xi,t)}{\partial x^2}\Big]\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = 0.$$

下证 $u(x,t)$ 满足初始条件，即对 $\forall\, x_0\in\mathbb{R}$, 有

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0^+)}u(x,t)=\varphi(x_0).$$

对 $\forall\, x_0\in\mathbb{R}$ 及 $\varepsilon>0$, 由 $\varphi(x)\in C(\mathbb{R})$ 可知，存在 $M>0$ 及 $\delta_1>0$, 使得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|\leqslant M,$$

且当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时，有

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3\sqrt{\pi}}.$$

对上述的 x_0, $\varepsilon>0$, $M>0$, $\delta_1>0$, 由 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta=\sqrt{\pi}$ 可知，存在 $X>0$, 使得对 $\forall\,(x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty)$, 有

$$\int_X^{+\infty}\left|\varphi(x+2a\sqrt{t}\eta)+\varphi(x_0)\right|\mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta\leqslant 2M\int_X^{+\infty}\mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$\int_{-\infty}^{-X}\left|\varphi(x+2a\sqrt{t}\eta)-\varphi(x_0)\right|\mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta\leqslant 2M\int_{-\infty}^{-X}\mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta<\frac{\varepsilon}{3},$$

并且当 $|\eta|<X$, $|x-x_0|<\dfrac{\delta_1}{2}$, $0<t<\left(\dfrac{\delta_1}{4aX}\right)^2$ 时，由

$$|(x+2a\sqrt{t}\,\eta)-x_0|<|x-x_0|+2a\sqrt{t}\,\eta<\frac{\delta_1}{2}+\frac{\delta_1}{2}=\delta_1$$

可得

$$\int_{-X}^{X}\left|\varphi(x+2a\sqrt{t}\eta)-\varphi(x_0)\right|\mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta<\frac{\varepsilon}{3\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta=\frac{\varepsilon}{3},$$

从而当 $|x-x_0|<\dfrac{\delta_1}{2}$, $0<t<\left(\dfrac{\delta_1}{4aX}\right)^2$ 时，有

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x+2a\sqrt{t}\eta)\mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta-\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x_0)\mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

即

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0^+)}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x+2a\sqrt{t}\eta)\mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x_0)\mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta.$$

另一方面，令 $\xi=x+2a\sqrt{t}\eta$, 则由式 (3.2.2) 可得

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x+2a\sqrt{t}\eta)\mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta,$$

并由 1° 的结论可知，对 $\forall\, x_0\in\mathbb{R}$, 有

$$\varphi(x_0)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x_0)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x_0)\mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta,$$

从而对 $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}$, 有

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0^+)} u(x,t) = \varphi(x_0).$$

注 3.2.1 当 $f(x,t) \neq 0$ 时，只要假设 $f(x,t)$ 有界并适当光滑，可以证明定理 3.2.1 也成立. 当 $\varphi(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界且分段连续时，定理 3.2.1 仍然成立，这时初始条件理解为仅在 $\varphi(x)$ 的连续点上成立.

在定理 3.2.1 中关于 $\varphi(x)$ 有界的假设 $(f\equiv 0)$ 可以改进为

$$|\varphi(x)| \leqslant Me^{Ax^2} \quad (x\in\mathbb{R},\ t>0),$$

并可以证明由式 (3.2.2) 确定的函数 $u(x,t)$ 在 $\left\{(x,t)\,\middle|\, x\in\mathbb{R},\ 0\leqslant t<\dfrac{1}{4a^2A}\right\}$ 上仍是初值问题 (3.2.1) 的解.

由定理 3.2.1 可知，齐次热传导方程的解比波动方程的解有较好的光滑性. 只要初值函数 $\varphi(x)$ 有界，解 $u(x,t)$ 在 $t>0$ 时就是无穷可微的，而对于固定的 t, 解 $u(x,t)$ 是 x 的解析函数.

例 3.2.1 设 c 为非零常数，求解下述热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x\in\mathbb{R},\ t>0, \\ u(x,0) = \begin{cases} c, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0. \end{cases} \end{cases}$$

解 令 $\xi = x + 2\sqrt{t}\,\eta$, 则由 Poisson 公式可知，所求初值问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi,0)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi = \frac{c}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{c}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta = \frac{c}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{0} \mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta + \frac{c}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta \\ &= \frac{c}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} \mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta + \frac{c}{2} = \frac{c}{2}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)+1\right], \end{aligned}$$

其中 $\mathrm{erf}(\alpha) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{\alpha} \mathrm{e}^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta$, 称其为误差函数.

例 3.2.2 用 Fourier 变换求解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, & x\in\mathbb{R},\ t>0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), & x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

解 将方程及初始条件两端关于 x 进行 Fourier 变换，得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\widehat{u}}{\mathrm{d}t^2} + a^2\lambda^2\widehat{u} = 0, \quad t>0, \\ \widehat{u}(\lambda,0) = \widehat{\varphi}(\lambda), \quad \left.\dfrac{\mathrm{d}\widehat{u}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \widehat{\psi}(\lambda), \end{cases}$$

故由常微分方程初值问题的求解公式，得

$$\widehat{u}(\lambda,t)=\widehat{\varphi}(\lambda)\cos a\lambda t+\frac{1}{a\lambda}\widehat{\psi}(\lambda)\sin a\lambda t.$$

另一方面，由 Fourier 变换性质 3.1.1 、性质 3.1.3 及性质 3.1.4 可得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[\widehat{\varphi}(\lambda)\cos a\lambda t]&=\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left[\widehat{\varphi}(\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\lambda t}+\widehat{\varphi}(\lambda)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\lambda t}\right]\\&=\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[\varphi(x-at)]+\mathcal{F}[\varphi(x+at)]\right]\\&=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)],\\\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin a\lambda t}{a\lambda}\widehat{\psi}(\lambda)\right]&=\frac{1}{2a}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\lambda\mathrm{i}}\widehat{\psi}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\lambda t}-\frac{1}{\lambda\mathrm{i}}\widehat{\psi}(\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\lambda t}\right]\\&=\frac{1}{2a}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\lambda\mathrm{i}}\mathcal{F}[\psi(x+at)]-\frac{1}{\lambda\mathrm{i}}\mathcal{F}[\psi(x-at)]\right]\\&=\frac{1}{2a}\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi-\int_{-\infty}^{x-at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\right]\\&=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

从而所求初值问题的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

此为 D'Alembert 公式，当 $\varphi\in C^2(\mathbb{R})$, $\psi\in C^1(\mathbb{R})$ 时，上述 $u(x,t)$ 的表达式为该问题的古典解.

3.2.2 用 Laplace 变换解半无界域上的混合问题

这里只举例说明如何应用 Laplace 变换解半无界域上的混合问题.

例 3.2.3 假设取一个硅片 (图 3.2.1)，让它的表面暴露在具有杂质均匀定常浓度为 N_0 的大量气体中. 气体的量充分大，使得杂质浓度 N_0 可看作是与时间 t 无关的常量. 随后，杂质通过平面 $x=0$ 扩散到硅片里形成一种分布，现在来求杂质浓度分布随时间变化的关系.

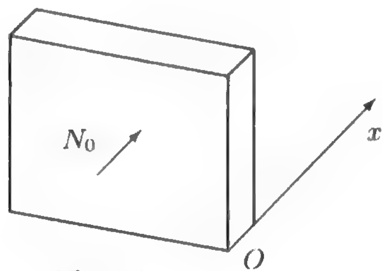


图 3.2.1

解 这个问题可归结为求解如下的扩散问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial N}{\partial t}-D\dfrac{\partial^2 N}{\partial x^2}=0, & 0<x<+\infty,\ t>0,\\N(x,0)=0, & 0\leqslant x<+\infty,\\N(0,t)=N_0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty}N(x,t)=0, & t\geqslant 0.\end{cases}$$

对方程和边界条件关于变量 t 进行 Laplace 变换，得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\widetilde{N}}{\mathrm{d}x^2} - \dfrac{s}{D}\widetilde{N}(x,s) = 0, \quad 0 < x < +\infty, \\ \widetilde{N}(0,s) = \dfrac{1}{s}N_0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty}\widetilde{N}(x,s) = 0, \end{cases}$$

解得常微分方程的通解为

$$\widetilde{N}(x,s) = A\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{s}{D}}x} + B\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{s}{D}}x},$$

其中 A 与 B 为任意常数.

另一方面，由无穷远处的边界条件

$$\lim_{x\to+\infty}\left(A\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{s}{D}}x} + B\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{s}{D}}x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\widetilde{N}(x,s) = 0,$$

得 $A=0$, 再利用边界条件 $\widetilde{N}(0,s) = \dfrac{1}{s}N_0$, 得 $B = \dfrac{1}{s}N_0$, 从而

$$\widetilde{N}(x,s) = \frac{N_0}{s}\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{s}{D}}x}.$$

查 Laplace 变换表可知，原定解问题的解为

$$N(x,t) = N_0\,\mathrm{erfc}\Big(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\Big),$$

其中 $\mathrm{erfc}(\alpha)$ 称为余误差函数，且满足关系式 $\mathrm{erf}(\alpha)+\mathrm{erfc}(\alpha)=1$.

综上所述，可以看到 Fourier 变换和 Laplace 变换不仅可用于求解一维热传导方程的初值问题，还适用于求解其他类型的线性偏微分方程的初值问题以及其他的定解问题，以 Fourier 变换为例其求解步骤为：

(1) 将方程关于部分自变量进行 Fourier 变换，导出未知函数 u 的 Fourier 变换 $\hat{u}$ 所满足的方程及初始条件 (一般化为常微分方程的初值问题).

(2) 求解 $\hat{u}$ 所满足的常微分方程的初值问题，得出 $\hat{u}$ 的表达式.

(3) 用 Fourier 逆变换公式求出 u 的表达式. 这是用 Fourier 变换法来求解时较困难的步骤，一般要利用 Fourier 变换的性质或直接查 Fourier 变换表及 Fourier 逆变换表而得.

习题　3.2

3.2.1 设 $\varphi(x)$ 连续且具有紧支集， $u(x,t)$ 是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

的解. 证明 $\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t) = 0$ 关于 x 一致成立.

3.2.2 求一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

形如 $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{t}}f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$ 的所有解.

3.2.3 求解下列热传导方程的初值问题:

(1) $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=\sin x, & x\in\mathbb{R};\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=x^2+1, & x\in\mathbb{R}.\end{cases}$

3.2.4 用 Fourier 变换法求解定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad x\in\mathbb{R},\ y>0,\\ u(x,0)=\varphi(x), \quad \lim\limits_{r\to\infty}u(x,y)=0, \quad x\in\mathbb{R},\end{cases}$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

3.2.5 设 α 与 β 均为实常数, 求解下列半无界直线上的混合问题:

(1) $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & 0<x<+\infty,\ t>0,\\ u(x,0)=0, & 0\leqslant x<+\infty,\\ u(0,t)=t^2, \quad \lim\limits_{x\to+\infty}u(x,t)=0, & t\geqslant 0.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\alpha^2 u, & 0<x<+\infty,\ t>0,\\ u(x,0)=\beta, & 0\leqslant x<+\infty,\\ u(0,t)=0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\partial u}{\partial x}=0, & t\geqslant 0.\end{cases}$

3.3 混合问题

和波动方程一样, 在几类特殊的有界区域上的热传导方程的混合问题都可以用分离变量法来求解. 本节介绍一维有界区域上热传导方程的混合问题的解法.

3.3.1 第一边值问题

对于一维热传导方程的混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), \quad 0<x<l,\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l,\\ u(0,t)=\mu_1(t), \quad u(l,t)=\mu_2(t), \quad t\geqslant 0\end{cases} \tag{3.3.1}$$

的求解, 类似于对波动方程的讨论, 可先求解下面的混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & 0<x<l,\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x), & 0\leqslant x\leqslant l,\\ u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0, & t\geqslant 0,\end{cases}\tag{3.3.2}$$

然后利用齐次化原理、边界条件齐次化及叠加原理，可求得混合问题 (3.3.1) 的解.

下面用分离变量法求混合问题 (3.3.2) 的形式解.

设混合问题 (3.3.2) 有可分离变量的非零解

$$u(x,t)=X(x)T(t),$$

把上式代入 (3.3.2) 的方程，并利用边界条件，可推得 $T(t)$ 应满足方程

$$T'(t)+a^2\lambda T(t)=0,$$

而 $X(x)$ 应满足特征值问题

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<l,\\ X(0)=0,\quad X(l)=0,\end{cases}$$

其中 λ 是待定常数.

由第 2 章第 3 节的讨论可知，只有当 λ 的值取为

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad n=1,2,\cdots$$

时，特征值问题才有非零解

$$X_n(x)=B_n\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad n=1,2,\cdots,$$

其中 B_n 为任意非零常数.

把特征值 $\lambda=\lambda_n$ 代入 $T(t)$ 满足的方程，解得

$$T_n(t)=A_n\mathrm{e}^{-a^2\lambda_n t}=A_n\mathrm{e}^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t},$$

其中 $A_n\ (n=1,2,\cdots)$ 为任意常数.

记 $C_n=A_nB_n\ (n=1,2,\cdots)$, 容易验证函数

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=C_n\mathrm{e}^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad n=1,2,\cdots$$

满足 (3.3.2) 的方程及边界条件.

把 $u_n(x,t)\ (n=1,2,\cdots)$ 叠加起来，得到级数

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x.\tag{3.3.3}$$

如果级数 (3.3.3) 在 $\{(x,t)\mid 0\leqslant x\leqslant l,\ t\geqslant 0\}$ 上收敛，并且在其内部关于 x 及 t 可以分别逐项微分二次及一次，则由级数 (3.3.3) 确定的函数 $u(x,t)$ 满足 (3.3.2) 的方程和边界条件.

另一方面，要使 $u(x,t)$ 满足初始条件，还必须有

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\varphi(x),$$

于是级数 (3.3.3) 中的系数可确定为

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi,\quad n=1,2,\cdots. \tag{3.3.4}$$

这样由级数 (3.3.3) 及式 (3.3.4) 确定的函数 $u(x,t)$ 称为混合问题 (3.3.2) 的形式解.

下面证明当 $\varphi(x)$ 满足一定条件时，形式解就是古典解.

定理 3.3.1 如果 $\varphi(x)\in C[0,l]$, $\varphi'(x)$ 在 $(0,l)$ 内分段连续，且 $\varphi(0)=\varphi(l)=0$, 则由级数 (3.3.3) 及式 (3.3.4) 确定的函数 $u(x,t)$ 是混合问题 (3.3.2) 的解.

证明 由 $\varphi(x)$ 在 $[0,l]$ 上连续， $\varphi'(x)$ 在 $(0,l)$ 内分段连续，且 $\varphi(0)=\varphi(l)=0$ 可推知，由级数

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-(\frac{n\pi a}{l})^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

所确定的函数 $u(x,t)$ 在 $(0,l)\times(0,+\infty)$ 内关于 x 可逐项微分两次，关于 t 可逐项微分一次，且 $u(x,t)$ 在 $[0,l]\times[0,+\infty)$ 上连续，故对 $\forall\,(x,t)\in(0,l)\times(0,+\infty)$, 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}\Big[C_n\mathrm{e}^{-(\frac{n\pi a}{l})^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x\Big]\\&=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\Big[-\Big(\frac{n\pi a}{l}\Big)^2\mathrm{e}^{-(\frac{n\pi a}{l})^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x\Big]\\&=a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big[C_n\mathrm{e}^{-(\frac{n\pi a}{l})^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x\Big]=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2},\end{aligned}$$

对 $\forall\,t\in[0,+\infty)$, 有

$$u(0,t)=\lim_{x\to0^+}u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\lim_{x\to0^+}\mathrm{e}^{-(\frac{n\pi a}{l})^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x=0,$$

$$u(l,t)=\lim_{x\to l^-}u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\lim_{x\to l^-}\mathrm{e}^{-(\frac{n\pi a}{l})^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x=0,$$

从而 $u(x,t)$ 满足 (3.3.2) 的方程及边界条件.

另一方面， $\varphi(x)$ 在 $[0,l]$ 上可展成 Fourier 正弦级数

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

其中

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi,\quad n=1,2,\cdots.$$

由 Fourier 系数的唯一性可知，对 $\forall\, x\in[0,l]$, 有

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{t\to 0^+} C_n\mathrm{e}^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\varphi(x),$$

从而 $u(x,t)$ 满足初始条件. ▌

例 3.3.1 用分离变量法求混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad 0<x<1,\ t>0,\\ u(x,0)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2},\\ 1-x, & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1,\end{cases}\\ u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0,\quad t\geqslant 0\end{cases}$$

的形式解.

解 由式 (3.3.3) 可知，所求问题的形式解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x,$$

由式 (3.3.4) 可得

$$\begin{aligned}C_n&=2\int_0^{\frac{1}{2}}\xi\sin n\pi\xi\,\mathrm{d}\xi+2\int_{\frac{1}{2}}^1(1-\xi)\sin n\pi\xi\,\mathrm{d}\xi\\ &=\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{1}{2}\cos\frac{n\pi}{2}+\int_0^{\frac{1}{2}}\cos n\pi\xi\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2}\cos\frac{n\pi}{2}+\int_{\frac{1}{2}}^1\cos n\pi\xi\,\mathrm{d}\xi\right]\\ &=\frac{2}{n\pi}\left[\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]=\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2},\end{aligned}$$

从而由

$$C_{2k}=0,\ \ C_{2k+1}=(-1)^k\frac{4}{(2k+1)^2\pi^2},\quad k=0,1,2,\cdots$$

可知，所求混合问题的形式解为

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}\mathrm{e}^{-(2k+1)^2\pi^2 t}\sin(2k+1)\pi x.$$

对于非齐次方程齐次定解条件的混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\quad 0<x<l,\ t>0,\\ u(x,0)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant l,\\ u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\quad t\geqslant 0\end{cases}\tag{3.3.5}$$

的求解，类似于波动方程同样有齐次化原理.

定理 3.3.2 (Duhamel 原理)

设 $f(x,t)$ 关于变量 x 满足定理 3.3.1 的条件，函数 $W(x,t;\tau)$ 是混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0, \quad 0<x<l,\ t>\tau,\\ W(x,t;\tau)\big|_{t=\tau}=f(x,\tau), \quad 0\leqslant x\leqslant,\\ W(0,t;\tau)=0, \quad W(l,t;\tau)=0, \quad \tau\leqslant<+\infty\end{cases}$$

的解，则由

$$u(x,t)=\int_0^t W(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau$$

确定的函数是混合问题 (3.3.5) 的解，其中 $\tau\geqslant 0$ 是参数.

证明 对 $u(x,t)$ 求偏导数，由 $W(x,t;\tau)$ 满足的方程及初始条件，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=\int_0^t\frac{\partial W(x,t;\tau)}{\partial t}\mathrm{d}\tau+W(x,t;\tau)\big|_{\tau=t}\\ &=a^2\int_0^t\frac{\partial^2 W(x,t;\tau)}{\partial x^2}\mathrm{d}\tau+f(x,t)\\ &=a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\int_0^t W(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau\right]+f(x,t)=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\end{aligned}$$

由 $W(x,t;\tau)$ 定义及满足的边界条件，得

$$u(x,0)=0, \quad u(0,t)=\int_0^t W(0,t;\tau)\mathrm{d}\tau=0, \quad u(l,t)=\int_0^t W(l,t;\tau)\mathrm{d}\tau=0,$$

从而 $u(x,t)$ 是混合问题 (3.3.5) 的解. ∎

设 $f(x,t)$ 满足定理 3.3.1 的条件，下面求混合问题 (3.3.5) 的解的表达式.

令 $t_1=t-\tau$, $\widetilde{W}(x,t_1)=W(x,t;\tau)$, 则 $\widetilde{W}(x,t_1)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \widetilde{W}}{\partial t_1}-a^2\dfrac{\partial^2 \widetilde{W}}{\partial x^2}=0, \quad 0<x<l,\ t_1>0,\\ \widetilde{W}(x,t_1)\big|_{t_1=0}=f(x,\tau), \quad 0\leqslant x\leqslant l,\\ \widetilde{W}(0,t_1)=0, \quad \widetilde{W}(l,t_1)=0, \quad t\geqslant 0,\end{cases}$$

并由 $f(x,t)$ 满足定理 3.3.1 的条件可知，上面混合问题的解存在，且可表示为

$$\widetilde{W}(x,t_1)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n(\tau)\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t_1}\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中

$$C_n(\tau)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,\tau)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi, \quad n=1,2,\cdots.$$

把 $t_1 = t-\tau$ 代入 $\widetilde{W}(x,t_1)$ 的表达式，得

$$W(x,t;\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n(\tau)\,\mathrm{e}^{-(\frac{n\pi a}{l})^2(t-\tau)}\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

于是由定理 3.3.2 得到混合问题 (3.3.5) 的解为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}C_n(\tau)\,\mathrm{e}^{-(\frac{n\pi a}{l})^2(t-\tau)}\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}\tau\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t\left(\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,\tau)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{e}^{-(\frac{n\pi a}{l})^2(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right]\sin\frac{n\pi}{l}x.\end{aligned}$$

例 3.3.2 求混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=A\mathrm{e}^{-t}, & 0<x<1,\ t>0,\\ u(x,0)=0, \quad 0\leqslant x\leqslant 1,\\ u(0,t)=0, \quad u(1,t)=0, \quad t\geqslant 0\end{cases}$$

的形式解，其中 A 为常数.

解 设 $f(x,t)=A\mathrm{e}^{-t}$. 则所求混合问题的形式解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t C_n(\tau)\mathrm{e}^{-n^2\pi^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\right]\sin n\pi x,$$

其中

$$C_n(\tau)=2\int_0^1 A\mathrm{e}^{-\tau}\sin n\pi\xi\mathrm{d}\xi=[1-(-1)^n]\frac{2A}{n\pi}\,\mathrm{e}^{-\tau},\quad n=1,2,\cdots.$$

令 $C_n^*=\int_0^t C_n(\tau)\mathrm{e}^{-n^2\pi^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau$, 则当 $n=2k-1$ $(k=1,2,\cdots)$ 时，有

$$\begin{aligned}C_{2k-1}^*&=\int_0^t[1-(-1)^{2k-1}]\,\frac{2A}{(2k-1)\pi}\,\mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{e}^{-(2k-1)^2\pi^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{4A}{(2k-1)\pi}\,\mathrm{e}^{-(2k-1)^2\pi^2 t}\int_0^t\mathrm{e}^{[(2k-1)^2\pi^2-1]\tau}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{4A}{(2k-1)^3\pi^3-(2k-1)\pi}[\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-(2k-1)^2\pi^2 t}],\end{aligned}$$

当 $n=2k$ $(k=1,2,\cdots)$ 时，有

$$C_{2k}^*=\int_0^t[1-(-1)^{2k}]\,\frac{2A}{2k\pi}\,\mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{e}^{-(2k)^2\pi^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=0,$$

从而所求混合问题的形式解为

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4A[\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-(2k-1)^2\pi^2 t}]}{(2k-1)^3\pi^3-(2k-1)\pi}\,\sin(2k-1)\pi x.$$

对于非齐次边界条件的混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad 0<x<l,\ t>0,\\ u(x,0)=0, \quad 0\leqslant x\leqslant l,\\ u(0,t)=\mu_1(t), \quad u(l,t)=\mu_2(t), \quad t\geqslant 0\end{cases} \tag{3.3.6}$$

的求解，类似于波动方程可化为求解齐次边界条件的混合问题.

设 $u(x,t)$ 是混合问题 (3.3.6) 的解，作未知函数的变换

$$u(x,t)=v(x,t)+W(x,t),$$

将上式代入混合问题 (3.3.6)，则 $v(x,t)$ 应满足混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial w}{\partial t}+a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad 0<x<l,\ t>0,\\ v(x,0)=-W(x,0), \quad 0\leqslant x\leqslant l,\\ v(0,t)=\mu_1(t)-W(0,t), \quad v(l,t)=\mu_2(t)-W(l,t), \quad t\geqslant 0,\end{cases}$$

其中 $W(x,t)$ 是任一足够光滑的待定函数.

如果 $v(x,t)$ 满足的混合问题的边界条件是齐次的，利用叠加原理可将其分解为混合问题 (3.3.2) 和 (3.3.5) 形式来求解，为此只需选取 $W(x,t)$ 满足齐次条件

$$W(0,t)=\mu_1(t), \quad W(l,t)=\mu_2(t), \quad t\geqslant 0,$$

显然满足此条件的光滑函数有无限多个，为了简单可选择 x 的线性函数，即

$$W(x,t)=\frac{l-x}{l}\,\mu_1(t)+\frac{x}{l}\,\mu_2(t).$$

如果记

$$\widetilde{f}(x,t)=-\frac{\partial w}{\partial t}+a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-\frac{l-x}{l}\,\mu_1'(t)-\frac{x}{l}\,\mu_2'(t),$$

$$\widetilde{\varphi}(x)=-W(x,0)=-\frac{l-x}{l}\,\mu_1(0)-\frac{x}{l}\,\mu_2(0),$$

则 $v(x,t)$ 满足的混合问题可写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\widetilde{f}(x,t), \quad 0<x<l,\ t>0,\\ v(x,0)=\widetilde{\varphi}(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l,\\ v(0,t)=0,\ v(l,t)=0, \quad t\geqslant 0,\end{cases}$$

从而利用叠加原理可知，混合问题 (3.3.6) 的解为

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\frac{l-x}{l}\,\mu_1(t)+\frac{x}{l}\,\mu_2(t)+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t C_n(\tau)\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\right]\sin\frac{n\pi}{l}x,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} C_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \widetilde{\varphi}(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi, \\ C_n(\tau) = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \widetilde{f}(\xi,\tau)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi, \quad n=1,2,\cdots. \end{cases}$$

例 3.3.3 求解长度为 l 的有界杆上的热传导问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0<x<l,\ t>0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = u_0, \quad t\geqslant 0, \end{cases}$$

其中 $\varphi(x)$ 在 $[0,l]$ 上连续， $\varphi'(x)$ 在 $(0,l)$ 内分段连续，且 $\varphi(0)=0$, $\varphi(l)=u_0$.

解 设 $u(x,t)$ 是所求定解问题的解，令

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{u_0}{l}x,$$

则 $v(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad 0<x<l,\ t>0. \\ v(x,0) = \varphi(x) - \dfrac{u_0}{l}x, \quad 0\leqslant x\leqslant l, \\ v(0,t) = 0, \ \ v(l,t) = 0, \quad t\geqslant 0, \end{cases}$$

故由式 (3.3.11) 可得

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

从而所求混合问题的形式解为

$$u(x,t) = \frac{u_0}{l}x + v(x,t) = \frac{u_0}{l}x + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

其中

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \left[\varphi(\xi) - \frac{u_0}{l}\xi\right]\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi, \quad n=1,2,\cdots.$$

3.3.2　第二边值问题

首先考虑边界条件为齐次的混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad 0<x<l,\ t>0, & (3.3.7) \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l, & (3.3.8) \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t\geqslant 0 & (3.3.9) \end{cases}$$

的求解. 下面用分离变量法求混合问题 (3.3.7)- (3.3.9) 的形式解.

将可分离变量的非零解 $u(x,t)=X(x)T(t)$ 代入边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & 0<x<l,\ t>0,\\ u_x(0,t)=0, \quad u_x(l,t)=0, & t\geqslant 0,\end{cases}$$

有

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda,$$

$$X'(0)T(t)=0, \quad X'(l)T(t)=0,$$

由此可推得 $T(t)$ 满足方程

$$T'(t)+a^2\lambda T(t)=0,$$

而 $X(x)$ 满足特征值问题

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<l,\\ X'(0)=0, \quad X'(l)=0,\end{cases}$$

其中 λ 是待定常数.

由第 2 章的讨论可知，只有当 λ 的值取为

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n=0,1,2,\cdots$$

时，特征值问题才有非零解

$$X_n(x)=\cos\frac{n\pi}{l}x, \quad n=0,1,2,\cdots,$$

从而当 $f(x,t)\equiv 0$ 时，混合问题 (3.3.7)—(3.3.9) 的特征函数系为

$$\left\{\cos\frac{n\pi}{l}x \,\middle|\, n=0,1,2,\cdots\right\}.$$

为求混合问题 (3.3.7)—(3.3.9) 的解，我们将待求的解 $u(x,t)$ 和定解数据 $\varphi(x)$、$f(x,t)$ 都按特征函数系 $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{l}x \,\middle|\, n=0,1,2,\cdots\right\}$ 展开，有

$$u(x,t)=\frac{T_0(t)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos\frac{n\pi}{l}x,$$

$$\varphi(x)=\frac{\varphi_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\cos\frac{n\pi}{l}x,$$

$$f(x,t)=\frac{f_0(t)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\cos\frac{n\pi}{l}x,$$

其中

$$\begin{cases}\varphi_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\varphi(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi, & n=0,1,2,\cdots,\\ f_n(t)=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(\xi,t)\cos\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi, & n=0,1,2,\cdots.\end{cases} \tag{3.3.10}$$

容易验证，$u(x,t)$ 满足边值条件 (3.3.9)，为了使 $u(x,t)$ 满足方程和初值条件，

将 $u(x,t)$ 的级数表达式代入方程 (3.3.7) 和初值条件 (3.3.8), 得

$$\frac{T_0'(t)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(t)\cos\frac{n\pi}{l}x=\frac{f_0(t)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[f_n(t)-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T_n(t)\right]\cos\frac{n\pi}{l}x,$$

$$\frac{T_0(0)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\cos\frac{n\pi}{l}x=\frac{\varphi_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\cos\frac{n\pi}{l}x.$$

比较上面等式两端关于特征函数的系数, 得常微分方程的初值问题

$$\begin{cases}T_n'(t)=-\left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2T_n(t)+f_n(t), & t>0,\\ T_n(0)=\varphi_n,\end{cases}$$

其中 $n=0,1,2,\cdots$. 利用常数变易法可解得

$$T_n(t)=\varphi_n\mathrm{e}^{-(\frac{n\pi a}{l})^2t}+\int_0^t f_n(\tau)\mathrm{e}^{-(\frac{n\pi a}{l})^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

从而问题 (3.3.7)—(3.3.9) 的解为

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\frac{1}{2}\varphi_0+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\mathrm{e}^{-(\frac{n\pi a}{l})^2t}\cos\frac{n\pi}{l}x\\&+\frac{1}{2}\int_0^t f_0(\tau)\mathrm{d}\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t f_n(\tau)\mathrm{e}^{-(\frac{n\pi a}{l})^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\right]\cos\frac{n\pi}{l}x.\end{aligned}\tag{3.3.11}$$

其中 φ_n, $f_n(t)$ $(n=0,1,2\cdots)$ 由式 (3.3.10) 确定.

类似于第一边值问题, 对于非齐次方程齐次定解条件的混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=f(x,t), & 0<x<l,\ t>0,\\ u(x,0)=0, & 0\leqslant x\leqslant l,\\ u_x(0,t)=0,\quad u_x(l,t)=0, & t\geqslant 0\end{cases}\tag{3.3.12}$$

的求解, 同样有齐次化原理.

定理 3.3.3 设 $f(x,t)$ 关于变量 x 在 $[0,l]$ 上具有连续的一阶偏导数, 且

$$f_x(0,t)=f_x(l,t)=0,$$

函数 $W(x,t;\tau)$ 是混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2W}{\partial x^2}=0, & 0<x<l,\ t>\tau,\\ W(x,t;\tau)\big|_{t=\tau}=f(x,\tau), & 0\leqslant x\leqslant l,\\ W_x(0,t;\tau)=0,\quad W_x(l,t;\tau)=0, & t\geqslant\tau\end{cases}$$

的解, 则由

$$u(x,t)=\int_0^t W(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau$$

确定的函数是混合问题 (3.3.12) 的解, 其中 $\tau\geqslant 0$ 是参数.

证明 由 $f'_x(x,t)$ 关于变量 x 在 $[0,l]$ 上连续，且 $f'_x(0,t)=f'_x(l,t)=0$ 可推知，函数 $u(x,t)$ 在 $(0,l)\times(0,+\infty)$ 上关于变量 x 具有连续的二阶偏导数，关于变量 t 具有连续的一阶偏导数，且 $u(x,t)$、$u_x(x,t)$ 均在 $[0,l]\times[0,+\infty)$ 上连续，故对 $u(x,t)$ 求偏导数，并由 $W(x,t;\tau)$ 满足的方程及初始条件，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=\int_0^t\frac{\partial W(x,t;\tau)}{\partial t}\mathrm{d}\tau+W(x,t;\tau)\big|_{\tau=t}\\&=a^2\int_0^t\frac{\partial^2W(x,t;\tau)}{\partial x^2}\mathrm{d}\tau+f(x,t)\\&=a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\int_0^tW(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau\right]+f(x,t)=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+f(x,t),\end{aligned}$$

由 $W(x,t;\tau)$ 满足的边界条件，得

$$u_x(0,t)=\int_0^tW_x(0,t;\tau)\mathrm{d}\tau=0,\quad u_x(l,t)=\int_0^tW_x(l,t;\tau)\mathrm{d}\tau=0,$$

由 $u(x,t)$ 的定义，得

$$u(x,0)=0,$$

从而 $u(x,t)$ 是混合问题 (3.3.12) 的解. ∎

设 $f(x,t)$ 满足定理 3.3.3 的条件，下面求混合问题 (3.3.12) 的解的表达式.

令 $t_1=t-\tau$, $\widetilde{W}(x,t_1)=W(x,t;\tau)$, 则 $\widetilde{W}(x,t_1)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\widetilde{W}}{\partial t_1}-a^2\dfrac{\partial^2\widetilde{W}}{\partial x^2}=0,\quad 0<x<l,\ t_1>0,\\ \widetilde{W}(x,t_1)\big|_{t_1=0}=f(x,\tau),\quad 0\leqslant x\leqslant l,\\ \widetilde{W}_x(0,t_1)=0,\quad \widetilde{W}_x(l,t_1)=0,\quad t_1\geqslant 0,\end{cases}$$

并由 $f(x,t)$ 满足定理 3.3.3 的条件可知，上面混合问题的解存在，且可表示为

$$\widetilde{W}(x,t_1)=\frac{1}{2}f_0(\tau)+\sum_{n=1}^{\infty}f_n(\tau)\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2t_1}\cos\frac{n\pi}{l}x,$$

把 $t_1=t-\tau$ 代入 $\widetilde{W}(x,t_1)$ 的表达式，得

$$W(x,t;\tau)=\frac{1}{2}f_0(\tau)+\sum_{n=1}^{\infty}f_n(\tau)\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)}\cos\frac{n\pi}{l}x,$$

于是由定理 3.3.3 得到混合问题 (3.3.12) 的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^tf_0(\tau)\mathrm{d}\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^tf_n(\tau)\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\right]\cos\frac{n\pi}{l}x,\qquad(3.3.13)$$

其中

$$f_n(\tau)=\frac{2}{l}\int_0^lf(\xi,\tau)\cos\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

注意到，这里 (3.3.13) 与 (3.3.11) 在 $\varphi(x)\equiv0$ 时，情形相同.

例 3.3.4 求混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=A\mathrm{e}^{-t}, & 0<x<1,\ t>0, \\ u(x,0)=x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ u(0,t)=0, \quad u(1,t)=0, & t\geqslant 0 \end{cases}$$

的形式解，其中 A 为常数.

解 利用分离变量法可知，所求混合问题的形式解为

$$\begin{aligned} u(x,t)=&\frac{1}{2}\varphi_0+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t}\cos n\pi x \\ &+\frac{1}{2}\int_0^t f_0(\tau)\mathrm{d}\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t f_n(\tau)\mathrm{e}^{-n^2\pi^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\right]\cos n\pi x, \end{aligned}$$

其中

$$\varphi_n=2\int_0^1\xi^2\cos n\pi\xi\mathrm{d}\xi,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

$$f_n(\tau)=2\int_0^1 A\mathrm{e}^{\tau}\cos n\pi\xi\mathrm{d}\xi,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

下面分别计算 φ_n，$f_n(\tau)$ $(n=0,1,2,\cdots)$.

$$\varphi_0=2\int_0^1\xi^2\mathrm{d}\xi=\frac{2}{3},$$

$$\begin{aligned} \varphi_n&=2\int_0^1\xi^2\cos n\pi\xi\mathrm{d}\xi=\frac{2}{n^3\pi^3}\int_0^{n\pi}\eta^2\cos\eta\mathrm{d}\eta \\ &=\frac{2}{n^3\pi^3}\left[\eta^2\sin\eta+2\eta\cos\eta-2\sin\eta\right]\Big|_0^{n\pi} \\ &=\frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right],\quad n=1,2,\cdots, \end{aligned}$$

$$f_0(\tau)=2\int_0^1 A\mathrm{e}^{\tau}\mathrm{d}\xi=2A\mathrm{e}^{\tau},$$

$$f_n(\tau)=2\int_0^1 A\mathrm{e}^{\tau}\cos n\pi\xi\mathrm{d}\xi=0,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

故

$$\int_0^t f_0(\tau)\mathrm{d}\tau=2A\int_0^t\mathrm{e}^{\tau}\mathrm{d}\tau=2A(\mathrm{e}^t-1),$$

$$\int_0^t f_n(\tau)\mathrm{e}^{-n^2\pi^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=0,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

从而所求混合问题的形式解为

$$u(x,t)=A(\mathrm{e}^t-1)+\frac{1}{3}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{(2k-1)^2\pi^2}\mathrm{e}^{-(2k-1)^2\pi^2 t}\cos(2k-1)\pi x.$$

对于非齐次边界条件的混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u_x(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x(l,t) = \mu_2(t), \quad t \geqslant 0 \end{cases} \tag{3.3.14}$$

的求解, 类似于波动方程可化为求解齐次边界条件的混合问题, 其原则上通过构造辅助函数, 把非齐次边值问题化为齐次边值问题.

设 $u(x,t)$ 是混合问题 (3.3.14) 的解, 作未知函数的变换

$$u(x,t) = v(x,t) + W(x,t),$$

将上式代入混合问题 (3.3.14), 则 $v(x,t)$ 应满足混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial W}{\partial t} + a^2 \dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ v(x,0) = \varphi(x) - W(x,0), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ v_x(0,t) = \mu_1(t) - W_x(0,t), \quad v_x(l,t) = \mu_2(t) - W_x(l,t), \quad t \geqslant 0, \end{cases} \tag{3.3.15}$$

其中 $W(x,t)$ 是任一足够光滑的待定函数.

如果混合问题 (3.3.15) 的边界条件是齐次的, 其形式解可由 (3.3.11) 和 (3.3.10) 给出, 为此只需选取 $W(x,t)$ 满足齐次条件

$$W_x(0,t) = \mu_1(t), \quad W_x(l,t) = \mu_2(t), \quad t \geqslant 0.$$

显然满足此条件的光滑函数有无限多个, 为了简单选择 x 的二次函数, 即

$$W(x,t) = \alpha(t)x^2 + \beta(t)x,$$

且待定函数 $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 满足

$$W_x(0,t) = \beta(t) = \mu_1(t), \quad W_x(l,t) = 2l\alpha(t) + \beta(t) = \mu_2(t).$$

由此解得

$$\alpha(t) = \frac{1}{2l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)], \quad \beta(t) = \mu_1(t),$$

从而

$$W(x,t) = \frac{1}{2l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)]x^2 + \mu_1(t)x.$$

如果记

$$\widetilde{f}(x,t) = f(x,t) - \frac{1}{2l}[\mu_2'(t) - \mu_1'(t)]x^2 - \mu_1'(t)x + \frac{a^2}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)],$$

$$\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \frac{1}{2l}[\mu_2(0) - \mu_1(0)]x^2 - \mu_1(0)x,$$

则混合问题 (3.3.15) 可写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\widetilde{f}(x,t), & 0<x<l,\ t>0,\\ v(x,0)=\widetilde{\varphi}(x), & 0\leqslant x\leqslant l,\\ v_x(0,t)=0,\ v_x(l,t)=0, & t\geqslant 0,\end{cases}$$

故由式 (3.3.11) 和式 (3.3.10) 可知，此混合问题的形式解为

$$\begin{aligned}v(x,t)=&\frac{1}{2}\widetilde{\varphi}_0+\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\varphi}_n\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\cos\frac{n\pi}{l}x\\&+\frac{1}{2}\int_0^t\widetilde{f}_0(\tau)\mathrm{d}\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t\widetilde{f}_n(\tau)\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\right]\cos\frac{n\pi}{l}x,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases}\widetilde{\varphi}_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\widetilde{\varphi}(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi, & n=0,1,2,\cdots,\\ \widetilde{f}_n(t)=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\widetilde{f}(\xi,t)\cos\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi, & n=0,1,2,\cdots.\end{cases}$$

从而混合问题 (3.3.14) 的形式解为

$$u(x,t)=v(x,t)+\frac{1}{2l}[\mu_2(t)-\mu_1(t)]x^2+\mu_1(t)x.$$

例 3.3.5 求解长度为 l 的有界杆上的热传导问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^t, & 0<x<1,\ t>0,\\ u(x,0)=x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ u_x(0,t)=0,\ \ u_x(1,t)=\mathrm{e}^t, & t\geqslant 0.\end{cases}$$

解 设 $u(x,t)$ 是所求定解问题的解，令

$$v(x,t)=u(x,t)-\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^t,$$

则 $v(x,t)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\mathrm{e}^t, & 0<x<1,\ t>0,\\ v(x,0)=\dfrac{1}{2}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ v_x(0,t)=0,\ \ v_x(1,t)=0, & t\geqslant 0,\end{cases}$$

故由式 (3.3.11) 可得

$$\begin{aligned}v(x,t)=&\frac{1}{2}\varphi_0+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t}\cos n\pi x\\&+\frac{1}{2}\int_0^t f_0(\tau)\mathrm{d}\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t f_n(\tau)\mathrm{e}^{-n^2\pi^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\right]\cos n\pi x,\end{aligned}$$

其中

$$\varphi_n = \int_0^1 \xi^2 \cos n\pi\xi \mathrm{d}\xi, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$f_n(\tau) = 2\int_0^1 \mathrm{e}^{\tau} \cos n\pi\xi \mathrm{d}\xi, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

下面计算 φ_n, $f_n(\tau)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, 得

$$\begin{aligned} &\varphi_0 = \frac{1}{3}, \qquad \varphi_n = \frac{2}{n^2\pi^2}\big[(-1)^n - 1\big], \quad n = 1, 2, \cdots, \\ &f_0(\tau) = 2\mathrm{e}^{\tau}, \quad f_n(\tau) = 0, \qquad\qquad n = 0, 1, 2, \cdots, \end{aligned}$$

故

$$\int_0^t f_0(\tau)\mathrm{d}\tau = 2(\mathrm{e}^t - 1), \quad \int_0^t f_n(\tau)\mathrm{e}^{-n^2\pi^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

从而

$$v(x,t) = (\mathrm{e}^t - 1) + \frac{1}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\, \mathrm{e}^{-(2k-1)^2\pi^2 t} \cos(2k-1)\pi x.$$

综上可知，所求混合问题的形式解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= v(x,t) + \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^t \\ &= \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t - \frac{5}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\, \mathrm{e}^{-(2k-1)^2\pi^2 t} \cos(2k-1)\pi x. \end{aligned}$$

习题 3.3

3.3.1 用分离变量法求混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ u(0,t) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$

的形式解.

3.3.2 设 A、ω、α、β 均为实常数，用分离变量法求下列混合问题的形式解:

(1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) = x(1-x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \geqslant 0; \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(x,0) = \sin^2 x, \quad 0 < x < \pi, \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad t \geqslant 0; \end{cases}$$

(3) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 2,\ t > 0, \\ u(x,0) = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=2} = 0, \quad t \geqslant 0; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u(0,t) = A\sin\omega t, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geqslant 0; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = \sin\dfrac{\pi x}{l}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \beta, \quad t \geqslant 0. \end{cases}$

3.3.3 用分离变量法求热传导方程的混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$

的解，其中

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ (x-1)^2, & \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

3.3.4 求定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\beta(u-u_0), \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u(0,t) = u_0, \quad u(l,t) = u_0, \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$

的解，其中 β、u_0 均为常数，$\varphi(x)$ 为已知函数.

3.3.5 长度为 l 的均匀细杆的初始温度为零，$x=0$ 端保持常温 u_0，在 $x=l$ 端和侧面上，热量可以发散到周围的介质中去，介质的温度保持为零度．温度分布函数 $u(x,t)$ 满足定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -b^2 u, \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u(0,t) = u_0, \quad \left[\dfrac{\partial u}{\partial x} + hu\right]_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \end{cases}$$

其中 $b>0$、$h>0$ 均为常数．试求该定解问题的解 $u(x,t)$.

3.3.6 求放射衰变问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A\mathrm{e}^{-\beta x}, \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = T, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$

的解，其中 β、A 及 T 均为常数，且 $\beta > 0$.

3.4 极值原理 解的唯一性及稳定性

为了讨论方便，我们引入记号

$$Q_{T(\alpha,\beta)} = \{(x,t) \mid \alpha < x < \beta,\ 0 < t \leqslant T\},$$

$$\Gamma_{T(\alpha,\beta)} = \{(\alpha,t),(\beta,t),(x,0) \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta\},$$

其中 α、β 及 T 为任意常数，且 $\alpha < \beta$ 及 $T > 0$.

3.4.1 极值原理

极值原理是描述扩散、传导等现象的热传导方程的一个重要特性. 以热传导方程为例，从物理学上看，在整个热传导的过程中，温度总是力图趋向平衡，温度最高处的热量向其他地方扩散，温度最低处的温度趋于上升，因此物体的最高温度和最低温度处的温度总是在开始时刻或物体的边界上达到，极值原理就是从数学上刻画了这种现象. 当物体的边界温度及其初始温度分布都不超过某个值 M, 而且物体内部没有“热源”，则该物体的温度分布函数 $u(x,t)$ 满足齐次热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{3.4.1}$$

由于热传导方程的某些基本性质与空间维数无关，故只考虑一维热传导方程的情形. 由于在物体内部不可能达到大于 M 的温度，对应于这一事实有如下的定理:

定理 3.4.1 (有界区域上的极值原理)

如果函数 $u(x,t)$ 在 $\overline{Q}_{T(\alpha,\beta)}$ 上连续， $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ 及 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 在 $Q_{T(\alpha,\beta)}$ 上连续且满足方程 (3.4.1), 则 $u(x,t)$ 在 $\Gamma_{T(\alpha,\beta)}$ 上取到它在 $\overline{Q}_{T(\alpha,\beta)}$ 上的最大值和最小值，即

$$\max_{\overline{Q}_{T(\alpha,\beta)}} u(x,t) = \max_{\Gamma_{T(\alpha,\beta)}} u(x,t), \quad \min_{\overline{Q}_{T(\alpha,\beta)}} u(x,t) = \min_{\Gamma_{T(\alpha,\beta)}} u(x,t).$$

证明 因为只要将 u 换成 $-u$, 最小值的情形可化成最大值情形进行讨论，下面仅对最大值情形进行证明.

显然

$$\max_{\Gamma_{T(\alpha,\beta)}} u(x,t) \leqslant \max_{\overline{Q}_{T(\alpha,\beta)}} u(x,t).$$

如果定理结论不成立，则存在方程 (3.4.1) 的解 $u(x,t)$, 使得

$$\max_{\Gamma_{T(\alpha,\beta)}} u(x,t) < \max_{\overline{Q}_{T(\alpha,\beta)}} u(x,t),$$

并且至少存在一点 $(x_0,t_0) \in Q_{T(\alpha,\beta)}$, 使得

$$u(x_0,t_0) = \max_{\overline{Q}_{T(\alpha,\beta)}} u(x,t).$$

记 $m = \max\limits_{\Gamma_{T(\alpha,\beta)}} u(x,t)$, $M = \max\limits_{\overline{Q}_{T(\alpha,\beta)}} u(x,t)$, 作辅助函数

$$v(x,t) = u(x,t) + \frac{M-m}{2T}(t_0 - t),$$

则在 Γ 上，有

$$v(x,t) \leqslant m + \frac{M-m}{2T}T = \frac{M+m}{2} < M = v(x_0,t_0),$$

故 $v(x,t)$ 在 $Q_{T(\alpha,\beta)}$ 上取到最大值，从而存在 $(x_1,t_1) \in Q_{T(\alpha,\beta)}$, 使得

$$v(x_1,t_1) = \max_{\overline{Q}_{T(\alpha,\beta)}} v(x,t) \geqslant v(x_0,t_0) = M.$$

由取极值的必要条件 $\left(\dfrac{\partial v}{\partial t} = 0,\ t_1 < T,\ \dfrac{\partial v}{\partial t} \geqslant 0,\ t_1 = T\right)$ 可得

$$\frac{\partial v(x_1,t_1)}{\partial t} \geqslant 0, \quad \frac{\partial^2 v(x_1,t_1)}{\partial x^2} \leqslant 0,$$

从而在点 $(x_1,t_1) \in Q_{T(\alpha,\beta)}$ 处，有

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \geqslant 0.$$

另一方面，在点 $(x_1,t_1) \in Q_{T(\alpha,\beta)}$ 处应有

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{M-m}{2T} = -\frac{M-m}{2T} < 0,$$

这与上式发生矛盾. 此矛盾说明 $M > m$ 不成立，即 $M = m$. ∎

在上述证明中所构造的辅助函数

$$g(x,t) = \frac{M-m}{2T}(t_0 - t)$$

并不是唯一的，只需使 $v(x,t) = u(x,t) + g(x,t)$ 满足下述条件:

(1) 在 $Q_{T(\alpha,\beta)}$ 上处处成立

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} < 0;$$

(2) 函数 $v(x,t)$ 在 $\Gamma_{T(\alpha,\beta)}$ 上取不到最大值.

例如，在定理 3.4.1 证明中，辅助函数也可取为

$$g(x,t) = \frac{M-m}{4(\beta-\alpha)^2}(x - x_0)^2.$$

推论 3.4.1 (比较原理)

若函数 $u(x,t)$ 及 $v(x,t)$ 在 $\overline{Q}_{T(\alpha,\beta)}$ 上连续，在 $Q_{T(\alpha,\beta)}$ 上满足方程 (3.4.1), 且在 $\Gamma_{T(\alpha,\beta)}$ 上恒有 $v \leqslant u$, 则对 $\forall\,(x,t) \in \overline{Q}_{T(\alpha,\beta)}$, 有 $v(x,t) \leqslant u(x,t)$.

证明 令 $W(x,t)=u(x,t)-v(x,t)$, 则对 $\forall\,(x,t)\in Q_{T(\alpha,\beta)}$, 有

$$\frac{\partial W}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left[\frac{\partial v}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]=0,$$

并且在 $\Gamma_{T(\alpha,\beta)}$ 上恒有

$$W(x,t)=u(x,t)-v(x,t)\geqslant 0,$$

从而由定理 3.4.1 可得

$$\min_{\overline{Q}_{T(\alpha,\beta)}}[u(x,t)-v(x,t)]=\min_{\overline{Q}_{T(\alpha,\beta)}}W(x,t)=\min_{\Gamma_{T(\alpha,\beta)}}w(x,t)\geqslant 0,$$

即在 $\overline{Q}_{T(\alpha,\beta)}$ 上恒有 $u\geqslant v$. ∎

对于无界区域上热传导方程的解，有类似的极值原理.

定理 3.4.2 (无界区域上的极值原理)

如果函数 $u(x,t)$ 在 $\overline{\Omega}_T$ 上连续且有界， $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ 及 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 在 Ω_T 上连续且满足方程 (3.4.1), 则

$$\sup_{\overline{\Omega}_T}u(x,t)=\sup_{\Gamma_0}u(x,0),\quad \inf_{\overline{\Omega}_T}u(x,t)=\inf_{\Gamma_0}u(x,0),$$

其中 $\Omega_T=\{(x,t)\mid x\in\mathbb{R},\ 0<t\leqslant T\}$, $\Gamma_0=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$.

证明 如果第一个等式不成立，则由 $u(x,t)$ 在 $\overline{\Omega}_T$ 上连续且有界可得

$$-\infty<\sup_{\Gamma_0}u(x,0)<\sup_{\overline{\Omega}_T}u(x,t)<+\infty.$$

记 $m=\sup\limits_{\Gamma_0}u(x,0)$, $M=\sup\limits_{\overline{\Omega}_T}u(x,t)$, 作辅助函数

$$v(x,t)=u(x,t)-\varepsilon(2a^2t+x^2),$$

其中 $\varepsilon>0$ 为任意常数.

可以验证， $v(x,t)$ 具有下列性质:

(1) 对 $\forall\,(x,t)\in\Omega_T$, 有

$$\frac{\partial v}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0;$$

(2) 在 Γ_0 上恒有

$$v(x,0)=u(x,0)-\varepsilon x^2\leqslant m;$$

(3) 当 $x^2\geqslant\dfrac{M-m}{\varepsilon}$, $0\leqslant t\leqslant T$ 时，有

$$v(x,t)=u(x,t)-\varepsilon(2a^2t+x^2)\leqslant M-\varepsilon x^2\leqslant m;$$

(4) 取 $\alpha\sqrt{\varepsilon}=\sqrt{M-m}$, 由定理 3.4.1 可得

$$\max_{\overline{Q}_{T(-\alpha,\alpha)}} v(x,t)=\max_{\Gamma_{T(-\alpha,\alpha)}} v(x,t)\leqslant m.$$

由 (3) 及 (4) 可得

$$\max_{\overline{\Omega}_T} v(x,t)\leqslant m,$$

故对 $\forall\,(x_0,t_0)\in\overline{\Omega}_T$, 有

$$u(x_0,t_0)=v(x_0,t_0)+\varepsilon(2a^2t_0+x_0^2)\leqslant m+\varepsilon(2a^2t_0+x_0^2),$$

从而令 $\varepsilon\to 0$, 得

$$u(x_0,t_0)\leqslant m,$$

再由 (x_0,t_0) 的任意性，得

$$\sup_{\overline{\Omega}_T} u(x,t)\leqslant m,$$

这与 $M>m$ 矛盾. 此矛盾说明 $M=m$.

同理可证，第二个等式成立. ∎

3.4.2　初值问题解的唯一性及稳定性

考虑一维热传导方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R},\end{cases}\tag{3.4.2}$$

它对应无界直线上的热传导问题. 在物理学中，要求温度变化是有界的，因此必须假设 $u(x,t)$ 在整个区域上为有界函数. 下面将在有界函数类中讨论初值问题解的唯一性和稳定性.

定理 3.4.3 初值问题 (3.4.2) 在有界函数类中的解是唯一的，且连续依赖于所给的初始条件.

证明 首先证明唯一性.

假设 u_1 和 u_2 是初值问题 (3.4.2) 的两个有界解，则 $u=u_1-u_2$ 是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=0, & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

的有界解，故对 $\forall\,(x_0,t_0)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty)$, 选取充分大的 $T>0$, 使得 $(x_0,t_0)\in\overline{\Omega}_T$, 由定理 3.4.2 及初始条件 $u(x,0)=0$ 可得

$$0=\inf_{\Gamma_0} u(x,0)\leqslant u(x_0,t_0)\leqslant\sup_{\Gamma_0} u(x,0)=0,$$

即 $u(x_0,t_0)=0$, 从而由 (x_0,t_0) 的任意性可知，对 $\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty)$, 有

$$u(x,t)=0,$$

即 $u_1\equiv u_2$. 唯一性得证.

下证稳定性.

假设 $u_i(x,t)$ $(i=1,2)$ 是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_i}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u_i(x,0)=\varphi_i(x), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

的两个有界解，则 $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ 是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

的有界解，故对 $\forall\,\varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, 当 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|<\delta$ 时，对任意的 $T>0$, 由定理 3.4.2 及初始条件 $u(x,0)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$, 得

$$\sup_{\overline{\Omega}_T}|u(x,t)|=\sup_{\Gamma_0}|u(x,t)|\leqslant\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由 T 的任意性，在上式中令 $T\to+\infty$, 有

$$\sup_{\mathbb{R}\times[0+\infty)}|u_1(x,t)-u_2(x,t)|<\varepsilon,$$

即初值问题 (3.4.2) 的有界解在最大模意义连续依赖于所给的初始条件. ∎

关于解在有界函数类中的唯一性，已被推广为更广泛的函数类

$$\{u(x,t)\mid|u(x,t)|<Me^{ax^2},\ M,\ a\text{为任意确定的正常数}\}$$

的情况[①], 但是超出这个函数类，解的唯一性不再成立.

3.4.3 混合问题解的唯一性及稳定性

定理 3.4.4 混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), & 0<x<l,\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x), & 0\leqslant x\leqslant l,\\ u(0,t)=\mu(t), \quad u(l,t)=\nu(t), & t\geqslant 0\end{cases}\tag{3.4.3}$$

的解如果存在，则必是唯一的，而且连续依赖于定解条件.

①参阅 E.T.Copson 著 *Partial Differential Equations* P.246—247.

证明 假设 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 是混合问题 (3.4.3) 的两个解，令

$$u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t),$$

则 $u(x,t)$ 是混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<l,\ t>0,\\ u(x,0)=0, \quad 0\leqslant x\leqslant l,\\ u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0, \quad t\geqslant 0\end{cases}$$

的解.

另一方面，对 $\forall\,(x_0,t_0)\in Q=\{(x,t)\mid 0<x<l,t>0\}$. 选取充分大的 $T>0$, 使得 $(x_0,t_0)\in Q_{T(0,l)}$, 由定理 3.4.1 及定解条件 $u(x,0)=u(0,t)=u(l,t)=0$, 得

$$0=\inf_{\Gamma_{T(0,l)}} u(x,t)\leqslant u(x_0,t_0)\leqslant \sup_{\Gamma_{T(0,l)}} u(x,t)=0.$$

即 $u(x_0,t_0)=0$, 从而由 (x_0,t_0) 的任意性可知，对 $\forall\,(x,t)\in Q$, 有

$$u(x,t)=0,$$

即 $u_1\equiv u_2$. 唯一性得证.

下证稳定性.

假设 $u_i(x,t)\ (i=1,2)$ 是混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), \quad 0<x<l,\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi_i(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l,\\ u(0,t)=\mu_i(t), \quad u(l,t)=\nu_i(t), \quad t\geqslant 0\end{cases}$$

的两个解，令

$$\begin{aligned}&u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t), &&\varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x),\\ &\mu(t)=\mu_1(t)-\mu_2(t), &&\nu(t)=\nu_1(t)-\nu_2(t).\end{aligned}$$

则 $u(x,t)$ 是混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad 0<x<l,\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l,\\ u(0,t)=\mu(t), \quad u(l,t)=\nu(t), \quad t\geqslant 0\end{cases}$$

的解.

另一方面，对 $\forall\,\varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{6}$, 对 $\forall\,T>0$, 当

$$\sup_{x\in[0,l]}|\varphi(x)|<\delta, \quad \sup_{t\in[0,T]}|\mu(t)|<\delta, \quad \sup_{t\in[0,T]}|\nu(t)|<\delta$$

时，由定理 3.4.1 及 u 满足的混合问题，得

$$\begin{aligned}\sup_{\overline{Q}_{T(0,l)}}|u(x,t)| &= \sup_{\Gamma_{T(0,l)}}|u(x,t)| \\ &\leqslant \sup_{x\in[0,l]}|\varphi(x)|+\sup_{t\in[0,T]}|\mu(t)|+\sup_{t\in[0,T]}|\nu(t)| \\ &< \frac{\delta}{6}+\frac{\delta}{6}+\frac{\delta}{6}=\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

上式右端不依赖于 T. 由 T 的任意性，在上式中令 $T\to+\infty$, 有

$$\sup_{\overline{Q}}|u_1(x,t)-u_2(x,t)|<\varepsilon,$$

即混合问题 (3.4.3) 的解在最大模意义连续依赖于所给的定解条件. ▌

利用类似的方法，可以证明二维和三维热传导方程的极值原理，于是也可以证明解的唯一性和稳定性的结论.

习题 3.4

3.4.1 设 c, B, M 均为非负常数， $u(x,t)$ 是方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-cu=0$$

的解，且 $|u(x,t)|$ 在矩形 $Q_{T(\alpha,\beta)}=\{(x,t)|\,\alpha<x<\beta,\ 0<t\leqslant T\}$ 的侧边 $x=\alpha$ 及 $x=\beta$ 上不超过 B, 在底边 $t=0$ 上不超过 M. 证明：此时 $u(x,t)$ 在矩形 $Q_{T(\alpha,\beta)}$ 上满足不等式

$$|u(x,t)|\leqslant\max\{Me^{ct},\ Be^{ct}\},$$

并由此推出上述混合问题解的唯一性和稳定性.

3.4.2 利用证明热传导方程极值原理的方法，证明满足调和方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

的函数在任何有界闭区域上的最大值不会超过它在边界上的最大值.

3.4.3 设 $Q=\{(x,t)\mid\alpha<x<\beta,\ 0<t\leqslant T\}$, Γ 为 Q 的边界. 如果 u 在闭区域 $\overline{Q}$ 上连续，在 Q 上关于 t 一阶连续可微，关于 x 二阶连续可微，且成立

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\leqslant 0, & (x,t)\in Q,\\ u|_{\Gamma}\leqslant 0.\end{cases}$$

试证明在 $\overline{Q}$ 上恒成立 $u\leqslant 0$.

3.4.4 利用证明一维热传导方程极值原理的方法，分别证明二维和三维热传导方程的极值原理，推出相应的混合问题解的唯一性和稳定性.

3.4.5 证明：在平面极坐标系下，二维热传导方程的混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, & 0<r<1,\ t>0,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, \\ u(r,\theta,0)=0, & 0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right|_{r=1}=0, & t\geqslant 0,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \end{cases}$$

有一个以上的解. 极值原理为什么不适用？

第 4 章　椭圆型方程

本章将研究一类典型的椭圆型方程，即 Poisson 方程

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = f$$

的边值问题，讨论它们的求解方法 (分离变量法与 Green 函数法) 与解的性质 (极值原理、平均值定理等), 并介绍调和函数的一些重要性质.

4.1　定解问题的提法

在这一章中，我们将研究二维 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{4.1.1}$$

和三维 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{4.1.2}$$

的第一、第二边值问题，以及二维 Poisson 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y) \tag{4.1.3}$$

和三维 Poisson 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x,y,z) \tag{4.1.4}$$

的第一、第二边值问题，并且侧重于三维 Laplace 方程.

定义 4.1.1 如果函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 内二阶连续可微，并且满足 Laplace 方程，即 $u \in C^2(\Omega)$, 且满足

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0,$$

则称 u 为区域 Ω 内的调和函数.

在本节下面的讨论中，除特别说明外，假设 Γ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的有界闭曲面， Ω 为 Γ 的内部区域， Ω' 为 Γ 的外部区域.

通常对 Laplace 方程与 Poisson 方程可以提三种类型的边界条件，得到三种类型的边值问题，而 Ω 上的三种边值问题可分别叙述如下：

第一边值问题 (Dirichlet 问题)

在 Γ 上给定一个连续函数 g. 要求找出一个函数 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$), 使它在 Ω 内满足方程 (4.1.2) 或 (4.1.4), 并在 Γ 上等于已给的函数 g, 即

$$u\big|_{\Gamma} = g.$$

第二边值问题 (Neumann 问题)

设 Γ 是光滑的, $\boldsymbol{n}$ 为 Γ 的外法线方向. 在 Γ 上给定一个连续函数 g. 要求找出一个函数 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, 使它在 Ω 内满足方程 (4.1.2) 或 (4.1.4), 而在 Γ 上任一点其法向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 存在, 并且等于已给的函数 g, 即

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\bigg|_{\Gamma} = g.$$

第三边值问题 (Robin 问题)

设 Γ 是光滑的, $\boldsymbol{n}$ 为 Γ 的外法线方向. 在 Γ 上给定一个连续函数 g 及一个非负的连续函数 σ ($\sigma \not\equiv 0$). 要求找出一个函数 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, 使它在 Ω 内满足方程 (4.1.2) 或 (4.1.4), 而且 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + \sigma u$ 在 Γ 上等于已给的函数 g, 即

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + \sigma u\right)\bigg|_{\Gamma} = g.$$

上面这些定解问题都是在有界区域上考虑的, 在应用中还会遇到在无界区域上考虑的问题, 特别是在一个有界区域之外考虑的问题.

例如, 确定某物体外部的定常温度场的问题, 就归结为求外部区域 Ω' 上的函数 $u(x,y,z)$, 使它满足方程 (4.1.2) 和边界条件 $u|_{\Gamma} = g$, 这里 g 表示物体表面的温度分布.

一般地, 如果给定曲面 Γ 上的一个连续函数 g, 要找出一个在外部区域 Ω' 内调和, 且在 $\overline{\Omega}'$ 上连续的函数, 使它在曲面 Γ 上等于已给的函数 g, 这样的定解问题称为 Dirichlet 外问题. 同样可以提 Neumann 外问题.

Laplace 方程的外问题是在无界区域上给出的, 定解问题的解在无穷远处是否应该加一定的限制呢? 下面的例子说明: 若在无穷远处不加任何限制, 外问题的解是不唯一的. 例如, 对下面的 Dirichlet 外问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad r > 1, \\ u\big|_{r=1} = 1 \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}). \end{cases}$$

显然函数 $u_1 \equiv 1$ 及 $u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ 都是该外问题的解. 为了能保证这个外问题解的唯一性, 通常要求解在无穷远处的极限为零, 即

$$\lim_{r \to +\infty} u(x,y,z) = 0. \tag{4.1.5}$$

下面给出两种外问题.

Dirichlet 外问题

在 Γ 上给定一个连续函数 g. 要求找出一个函数 $u\in C^2(\Omega')\cap C(\overline{\Omega}')$, 使它在 Ω' 内满足方程 (4.1.2) 或 (4.1.4), 当点 (x,y,z) 趋于无穷远时, $u(x,y,z)$ 一致地趋于零 (即满足条件 (4.1.5)), 并且它在边界 Γ 上等于已给的函数 g, 即

$$u\big|_{\Gamma}=g.$$

Neumann 外问题

设 Γ 是光滑的, $\boldsymbol{n}'$ 是 Γ 相对外部区域 Ω' 的外法线方向. 在 Γ 上给定一个连续函数 g. 要求找出一个函数 $u\in C^2(\Omega')\cap C^1(\overline{\Omega}')$, 使它在 Ω' 内满足方程 (4.1.2) 或 (4.1.4), 在无穷远处满足条件 (4.1.5), 而且它在 Γ 上任一点的法向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}'}$ 存在, 并满足

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}'}\bigg|_{\Gamma}=g.$$

为了和外问题相区别, 有时把第一边值问题和第二边值问题分别称为 Dirichlet 内问题和 Neumann 内问题.

当然, 求解区域也可以既不是一个有界区域的内部, 也不是它的外部. 例如半空间, 这时求解区域仍是无界的, 其边界伸向无穷远, 对相应的定解问题, 也应在无穷远处添加一定的条件, 与外问题情形是类似的.

还有一类在应用上也很重要的等值面边值问题, 其相应的等值面边界条件提法如下: 在区域 Ω 的边界 Γ 上满足

$$\begin{cases} u\big|_{\Gamma}=\text{待定常数 } C,\\ \displaystyle\int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S=\text{已知常数 } A. \end{cases}$$

例如, 对于给定空间 $\mathbb{R}^3$ 中的一金属带电体 Ω, 其带电量为 q, 要确定其外部空间 Ω' 中的静电场. 由静电学可知, 静电场的电势 u 满足 Laplace 方程, 金属带电体 Ω 的表面 Γ 是一个等势面, 记其电势为 C (待定), 而 Γ 上的电通量为 $4\pi q$. 因此, 归结为下述等值面边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \quad (x,y,z)\in\Omega',\\ u\big|_{\Gamma}=C, \quad C\text{ 为待定常数},\\ \displaystyle\int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S=4\pi q,\\ \displaystyle\lim_{r\to+\infty}u(x,y,z)=0. \end{cases}$$

在等值面边界条件中，第二式表示 Γ 上的总电通量 (静电场情形)、总热流量 (稳定温度场情形) 或总流量 (稳定无旋流情形) 为已知，因此这类边界条件又称为总流量边界条件.

对 n 维 Laplace 方程和 Poisson 方程，也可提各种边值问题，但对外问题的解在无穷远处要附加一个条件，特别地，在二维情形中，只需要求解在无穷远处保持有界 (不必像三维时那样，要求解在无穷远处一致地趋于零).

习题 4.1

4.1.1 证明下列函数是调和函数：

(1) $u(x,y)=ax+by+c$ (a, b, c 为常数);

(2) $u(x,y)=xy$; (3) $u(x,y)=x^2-y^2$;

(4) $u(x,y)=x^3-3xy^2$; (5) $u(x,y)=3x^2y-y^3$;

(6) $u(x,y)=\sin nx\sinh ny$; (7) $u(x,y)=\cos nx\sinh ny$;

(8) $u(x,y)=\mathrm{e}^{nx}\sin ny$; (9) $u(x,y)=\mathrm{e}^{nx}\cosh ny$.

4.1.2 证明：三维拉普拉斯算子在球面坐标 (r,θ,φ) 下可以写成

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}.$$

4.1.3 证明：三维拉普拉斯算子在柱面坐标 (r,θ,z) 下可以写成

$$\Delta u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}.$$

4.1.4 证明：二维拉普拉斯算子在极坐标 (r,θ) 下可以写成

$$\Delta u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}.$$

4.1.5 举例说明：在二维调和方程的 Dirichlet 外问题中，如果对解 $u(x,y)$ 在无穷远处不加任何限制，就不能保证解的唯一性.

4.2 分离变量法

由于 4.1 节中所提出的各定解问题都是线性的，所以对 Poisson 方程 (4.1.4) 的各种边值问题的求解，可先找出方程 (4.1.4) 的一个特解，由叠加原理就能把它化为 Laplace 方程 (4.1.2) 对应的边值问题，故我们首先讨论 Laplace 方程的各种边值问题的求解.

4.2.1 矩形区域上的 Dirichlet 问题

我们以二维情形为例，说明如何用分离变量法来求解矩形区域上 Laplace 方程的 Dirichlet 内问题.

考虑描述矩形平板上的温度分布达到平衡状态的边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a,\ 0 < y < b, \\ u(x,0) = g(x), \quad u(x,b) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \\ u(0,y) = 0, \quad u(a,y) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

其中 $g(x)$ 是已知的连续函数，且满足相容性条件 $g(0) = g(a) = 0$.

首先设边值问题 (4.2.1) 具有变量分离形式的非零解

$$u(x,y) = X(x)Y(y),$$

将上式代入 (4.2.1) 的方程，并利用边界条件可得到 $Y(y)$ 应满足

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0,$$

$X(x)$ 应满足特征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \quad X(a) = 0, \end{cases}$$

其中 λ 是待定常数.

解上面的特征值问题，得到全部特征值为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

对应的特征函数为

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi}{a} x, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

把特征值 $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2$ 代入到 $Y(y)$ 的方程中，得

$$Y''(y) - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y(y) = 0,$$

解出通解为

$$Y_n(y) = C_n \cosh \frac{n\pi}{a} y + D_n \sinh \frac{n\pi}{a} y = E_n \sinh \frac{n\pi}{a}(y + F_n),$$

其中

$$E_n = \sqrt{D_n^2 - C_n^2}, \quad F_n = \frac{a}{n\pi} \tanh^{-1} \frac{C_n}{D_n}.$$

利用 (4.2.1) 中的齐次边界条件

$$u(x,b) = X(x)Y(b) = 0$$

可得

$$Y_n(b) = E_n \sinh \frac{n\pi}{a}(b + F_n) = 0.$$

要使 $Y_n(y)$ 为非零解，应有 $E_n \neq 0$, $F_n = -b$, 于是

$$Y_n(y) = E_n \sinh \frac{n\pi}{a}(y-b).$$

利用叠加原理得到形式解为

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi(y-b)}{a}.$$

其中 A_n 为待定系数.

最后利用 (4.2.1) 中的非齐次边界条件，得

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left(-\frac{n\pi b}{a}\right) \sin \frac{n\pi}{a} x = g(x).$$

这是一个 Fourier 正弦级数，因此

$$A_n = -\frac{2}{a\sinh \dfrac{n\pi b}{a}} \int_0^a g(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{a}\, d\xi, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

综上可知，边值问题 (4.2.1) 的形式解为

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sinh \dfrac{n\pi(b-y)}{a}}{\sinh \dfrac{n\pi b}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \tag{4.2.2}$$

其中

$$a_n = \frac{2}{a} \int_0^a g(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{a}\, d\xi, \quad n = 1, 2, \cdots$$

是 $g(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上展开为正弦级数时的 Fourier 系数.

下面证明当 $g(x)$ 满足一定条件时，由 (4.2.2) 确定的形式解 $u(x,y)$ 就是边值问题 (4.2.1) 的解.

定理 4.2.1 (矩形区域上的 Dirichlet 问题解的存在性)

设 $g(x)$ 在闭区间 $[0,a]$ 上连续， $g'(x)$ 在开区间 $(0,a)$ 内分段连续，并且满足 $g(0) = g(a) = 0$, 则由 (4.2.2) 式确定的函数 u 是 Dirichlet 内问题 (4.2.1) 的解.

证明　设 $u_k(x,y) = X_k(x)Y_k(y)$, 其中

$$X_k(x) = a_k \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

$$Y_k(y) = \left(\sinh \frac{k\pi b}{a}\right)^{-1} \sinh \frac{k\pi(b-y)}{a}, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

则式 (4.2.2) 可写为

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)Y_k(y),$$

从而由 $g(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续， $g'(x)$ 在开区间 $(0,a)$ 内分段连续，且

$$g(0)=g(a)=0$$

可知，存在常数 $M_0>0$, 使得对 $\forall\, x\in[0,a]$, 有

$$|X_k(x)|\leqslant|a_k|=\left|\frac{2}{a}\int_0^a g(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{a}\,\mathrm{d}\xi\right|\leqslant M_0,$$

并且 $g(x)$ 的 Fourier 系数 a_k 所构成的级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 绝对收敛.

记 $Q_\eta=\{(x,y)\mid 0<x<a,\ 0\leqslant\eta<y<b\}$, 则对 $\forall\,(x,y)\in\overline{Q}_0$, 有

$$\begin{aligned}|u_k(x,y)|&=\left|a_k\sin\frac{k\pi x}{a}\left(\sinh\frac{k\pi b}{a}\right)^{-1}\sinh\frac{k\pi(b-y)}{a}\right|\\&\leqslant|a_k|\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{k\pi(b-y)}{a}}}{\mathrm{e}^{\frac{k\pi b}{a}}}\,\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{2k\pi(b-y)}{a}}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{2k\pi b}{a}}}\leqslant\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\frac{2\pi b}{a}}}\,|a_k|,\end{aligned}$$

从而由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|$ 收敛可知， $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x,y)$ 在 $\overline{Q}_0$ 上一致收敛，且和函数 $u(x,y)\in C(\overline{Q}_0)$.

另一方面，对 $\forall\,\eta\in(0,b)$, 当 $(x,y)\in\overline{Q}_\eta$ 时，有

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial u_k}{\partial y}\right|&=\left|a_k\sin\frac{k\pi x}{a}\left(-\frac{k\pi}{a}\right)\left(\sinh\frac{k\pi b}{a}\right)^{-1}\cosh\frac{k\pi}{a}(b-y)\right|\\&\leqslant\frac{M_0k\pi}{a}\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{k\pi(b-y)}{a}}}{\mathrm{e}^{\frac{k\pi b}{a}}}\,\frac{1+\mathrm{e}^{-\frac{2k\pi(b-y)}{a}}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{2k\pi b}{a}}}\\&\leqslant\frac{2M_0\pi}{a(1-\mathrm{e}^{-\frac{2k\pi b}{a}})}\,k\mathrm{e}^{-\frac{k\pi\eta}{a}},\quad k=1,2,\cdots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}\right|&=\left|a_k\sin\frac{k\pi x}{a}\left(-\frac{k\pi}{a}\right)^2\left(\sinh\frac{k\pi b}{a}\right)^{-1}\sinh\frac{k\pi}{a}(b-y)\right|\\&\leqslant\frac{M_0\pi^2}{a^2(1-\mathrm{e}^{-\frac{2k\pi b}{a}})}\,k^2\mathrm{e}^{-\frac{k\pi\eta}{a}},\quad k=1,2,\cdots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial u_k}{\partial x}\right|&=\left|a_k\frac{k\pi}{a}\cos\frac{k\pi x}{a}\left(\sinh\frac{k\pi b}{a}\right)^{-1}\sinh\frac{k\pi}{a}(b-y)\right|\\&\leqslant\frac{M_0\pi}{a(1-\mathrm{e}^{-\frac{2k\pi b}{a}})}\,k\mathrm{e}^{-\frac{k\pi\eta}{a}},\quad k=1,2,\cdots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}\right|&=\left|-a_k\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2\sin\frac{k\pi x}{a}\left(\sinh\frac{k\pi b}{a}\right)^{-1}\sinh\frac{k\pi}{a}(b-y)\right|\\&\leqslant\frac{M_0\pi^2}{a^2(1-\mathrm{e}^{-\frac{2k\pi b}{a}})}\,k^2\mathrm{e}^{-\frac{k\pi\eta}{a}},\quad k=1,2,\cdots,\end{aligned}$$

故由级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\,\mathrm{e}^{-\frac{k\pi\eta}{a}}$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2\,\mathrm{e}^{-\frac{k\pi\eta}{a}}$ 均收敛可知，下列级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial u_k}{\partial y},\quad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2},\quad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial u_k}{\partial x},\quad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}$$

均在 $\overline{Q}_\eta$ 上一致收敛，且绝对收敛，从而由 η 的任意性可知，和函数 $u(x,y)$ 关于变量 x 和变量 y 可以逐项微分两次，且 $u(x,y) \in C^2(Q_0)$.

综上可知，和函数 $u(x,y) \in C(\overline{Q}_0) \cap C^2(Q_0)$, 并且对 $\forall\,(x,t) \in Q_0$, 有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} \right) = 0.$$

下证 $u(x,y)$ 满足边界条件.

由 $g(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，$g'(x)$ 在 $(0,a)$ 内分段连续，且 $g(0) = g(a) = 0$ 可知，$g(x)$ 在 $[0,a]$ 上可展开成 Fourier 级数

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

其中

$$a_k = \frac{2}{a} \int_0^a g(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{a}\, \mathrm{d}\xi, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

另一方面，由 $u_k(x,y) \in C(\overline{Q}_0)$ 及级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x,y)$ 在 $\overline{Q}_0$ 上一致收敛于 $u(x,y)$ 可知，对 $\forall\, x \in [0,a]$, 有

$$u(x,b) = \lim_{y \to b^-} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,b) = 0,$$

并由 Fourier 系数的唯一性可得

$$u(x,0) = \lim_{y \to 0^+} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x = g(x).$$

同时，对 $\forall\, y \in [0,b]$, 有

$$u(0,y) = \lim_{x \to 0^+} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0,y) = 0,$$

$$u(a,y) = \lim_{x \to a^-} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(a,y) = 0.$$ ▌

对于矩形区域上的一般 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & 0 < x < a,\ 0 < y < b, \\ u(x,0) = g_1(x), \quad u(x,b) = g_2(x), & 0 \leqslant x \leqslant a, \\ u(0,y) = g_3(y), \quad u(a,y) = g_4(y), & 0 \leqslant y \leqslant b. \end{cases}$$

可利用叠加原理分成四个边值问题来解决，其中每一个边值问题只有一个非齐次边界条件，而其余的三个边界条件是齐次的，并要求 $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(y)$, $g_4(y)$ 满

足相容性条件

$$g_1(0)=g_3(0),\quad g_2(0)=g_3(b),\quad g_1(a)=g_4(0),\quad g_2(a)=g_4(b).$$

因此，用求解 Dirichlet 问题 (4.2.1) 的方法，可确定每个边值问题的解，然后利用叠加原理把四个解相加，就得到矩形区域上的一般 Dirichlet 问题的解.

4.2.2 圆域内的 Dirichlet 问题

为了研究圆域内的 Dirichlet 问题，首先研究平面上以原点为心，a 为半径的圆域内的 Dirichlet 问题，并采用极坐标 (r,θ).

首先讨论圆域内的 Dirichlet 内问题.

假设在圆周 $r=a$ 上给定了一个连续函数 $g(\theta)$, 并且满足

$$g(-\pi)=g(\pi),$$

则这个圆域内的 Dirichlet 内问题可写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0,\quad 0<r<a,\ -\pi<\theta<\pi,\\ u(a,\theta)=g(\theta),\quad -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi.\end{cases}\tag{4.2.3}$$

为了使解 u 在 $r=0$ 处保持调和，要求当 $r=0$ 时，函数 u 为有限值 (即 $r=0$ 为 $u(r,\theta)$ 的可去奇点).

利用分离变量法，来找如下形式的非零解

$$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta).$$

把上式代入 (4.2.3) 的方程，分离变量得

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=-r^2\frac{R''(r)}{R(r)}-r\frac{R'(r)}{R(r)}=-\lambda,$$

于是 $\Theta(\theta)$ 应满足常微分方程

$$\Theta''(\theta)+\lambda\Theta(\theta)=0,\tag{4.2.4}$$

$R(r)$ 应满足常微分方程

$$r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda R(r)=0.\tag{4.2.5}$$

另一方面，当 $\lambda<0$ 时，方程 (4.2.4) 的通解为

$$\Theta(\theta)=C_1\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\theta}+C_2\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\theta},$$

从而由 u 是单值的，并要求 $\Theta(\theta)$ 满足周期性条件

$$\Theta(\theta+2\pi)=\Theta(\theta)$$

可知，当 $\lambda<0$ 时，方程 (4.2.4) 没有非零解.

当 $\lambda=0$ 时，由方程 (4.2.4) 和 (4.2.5) 解得

$$u(r,\theta)=(A\theta+B)(C\ln r+D),$$

故由 $\lim\limits_{r\to0^+}\ln r=-\infty$ 可知，为了使 $\lim\limits_{r\to0^+}u(r,\theta)$ 为有限值，必须 $C=0$, 为了使 u 是以 2π 为周期的函数，还必须有 $A=0$, 从而当 $\lambda=0$ 时，解得 $u_0(r,\theta)=$ 常数.

当 $\lambda>0$ 时，方程 (4.2.4) 的解为

$$\Theta(\theta)=A\cos\sqrt{\lambda}\theta+B\sin\sqrt{\lambda}\theta,$$

故由 $\Theta(\theta)$ 是以 2π 为周期的函数可推得

$$\lambda=\lambda_k=k^2,\quad k=1,2,\cdots.$$

把 $\lambda_k=k^2$ 代入方程 (4.2.5), 得到 Euler 方程，其通解为

$$R_k(r)=C_kr^k+D_kr^{-k},\quad k=1,2,\cdots,$$

故由 $\lim\limits_{r\to0^+}r^{-k}=+\infty$ 可知，为了使 $\lim\limits_{r\to0^+}u(r,\theta)$ 为有限值，必须 $D_k=0$. 从而当 $\lambda>0$ 时， Dirichlet 内问题 (4.2.3) 中方程的一列特解为

$$u_k(r,\theta)=r^k(A_k\cos k\theta+B_k\sin k\theta),\quad k=1,2,\cdots.$$

利用叠加原理可知， Dirichlet 内问题 (4.2.3) 中方程的形式解为

$$u(r,\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}r^k(A_k\cos k\theta+B_k\sin k\theta),\quad r<a,$$

其中常数 $\dfrac{A_0}{2}$ 是对应于 $\lambda=0$ 的特征函数.

如果当 $0\leqslant r\leqslant a$ 时，上面的级数一致收敛，由边界条件 $u(a,\theta)=g(\theta)$ 可得

$$g(\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a^k(A_k\cos k\theta+B_k\sin k\theta).$$

如果 $g(\theta)$ 可展开为 Fourier 级数，则

$$A_0=a_0,\quad A_k=a^{-k}a_k,\quad B_k=a^{-k}b_k,\quad k=1,2,\cdots.$$

从而圆域内的 Dirichlet 内问题的形式解为

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^k(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta),\quad r<a, \tag{4.2.6}$$

其中

$$\begin{cases}a_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}g(\tau)\cos k\tau\mathrm{d}\tau, & k=0,1,2,\cdots,\\ b_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}g(\tau)\sin k\tau\mathrm{d}\tau, & k=1,2,3,\cdots.\end{cases}$$

以下我们要证明，当 $g(\theta)$ 满足一定条件时，由 (4.2.6) 确定的函数 $u(r,\theta)$ 就是边值问题 (4.2.3) 的解.

定理 4.2.2 (圆域内的 Dirichlet 内问题解的存在性)

设 $g(\theta)$ 在闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上连续，$g'(\theta)$ 在开区间 $(-\pi,\pi)$ 内分段连续，且满足条件 $g(-\pi)=g(\pi)$，则边值问题 (4.2.3) 的解由级数 (4.2.6) 给出.

证明 设 $u_k(r,\theta)=R_k(r)\Theta_k(\theta)$，其中

$$R_0(r)=\frac{1}{2},\quad R_k(r)=\frac{r^k}{a^k},\quad k=1,2,\cdots,$$

$$\Theta_0(\theta)=a_0,\quad \Theta_k(\theta)=a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta,\quad k=1,2,\cdots,$$

则式 (4.2.6) 可写为

$$u(r,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(r,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}R_k(r)\Theta_k(\theta),$$

从而由 $g(\theta)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，$g'(\theta)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内分段连续，且 $g(-\pi)=g(\pi)$ 可知，存在常数 $M=1+4\max\limits_{-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi}|g(\theta)|>0$，使得对 $\forall\,\theta\in[-\pi,\pi]$，有

$$|\Theta_k(\theta)|\leqslant|a_k|+|b_k|=\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\tau)\cos k\tau\mathrm{d}\tau\right|+\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\tau)\sin k\tau\mathrm{d}\tau\right|\leqslant M,$$

并且级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 与 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$ 均绝对收敛.

记 $Q_\eta=\{(r,\theta)\mid 0<r<\eta\leqslant a,\ -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi\}$，则对 $\forall\,(r,\theta)\in\overline{Q}_a$，有

$$|u_k(r,\theta)|=\Big|R_k(r)\Theta(\theta)|\leqslant|a_k|+|b_k|,$$

从而由级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|$ 与 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|$ 均收敛可知，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(r,\theta)$ 在 $\overline{Q}_a$ 上一致收敛，且和函数 $u(x,y)\in C(\overline{Q}_a)$.

另一方面，对 $\forall\,\eta\in(0,a)$，当 $(r,\theta)\in\overline{Q}_\eta$ 时，有

$$\left|\frac{\partial u_k}{\partial r}\right|=|\Theta_k(\theta)|\left|\frac{k}{a}\Big(\frac{r}{a}\Big)^{k-1}\right|\leqslant\frac{M}{a}\,k\Big(\frac{\eta}{a}\Big)^{k-1},$$

$$\left|\frac{\partial^2 u_k}{\partial r^2}\right|=|\Theta_k(\theta)|\left|\frac{k(k-1)}{a^2}\Big(\frac{r}{a}\Big)^{k-2}\right|\leqslant\frac{M}{a^2}\,k^2\Big(\frac{\eta}{a}\Big)^{k-2},$$

$$\left|\frac{\partial u_k}{\partial\theta}\right|=|R_k(r)|\Big|-ka_k\sin k\theta+kb_k\cos k\theta\Big|\leqslant Mk\Big(\frac{\eta}{a}\Big)^{k},$$

$$\left|\frac{\partial^2 u_k}{\partial\theta^2}\right|=|R_k(r)|\Big|-k^2a_k\cos k\theta-k^2b_k\sin k\theta\Big|\leqslant Mk^2\Big(\frac{\eta}{a}\Big)^{k},$$

故由级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{\eta}{a}\right)^k$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2\left(\frac{\eta}{a}\right)^k$ 均收敛可知，下列级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial u_k}{\partial r},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_k}{\partial r^2},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial u_k}{\partial \theta},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_k}{\partial \theta^2}$$

均在 $\overline{Q}_\eta$ 上一致收敛，且绝对收敛，从而由 η 的任意性可知，和函数 $u(r,\theta)$ 关于变量 r 和变量 θ 可以逐项微分两次，且 $u(r,\theta)\in C^2(Q_a)$.

综上可知，和函数 $u(r,\theta)\in C(\overline{Q}_a)\cap C^2(Q_a)$, 并且对 $\forall\,(r,\theta)\in Q_a$, 有

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u_k}{\partial r}=\frac{k}{ar}\left(\frac{r}{a}\right)^{k-1}\Theta_k(\theta)=\frac{k}{r^2}R_k(r)\Theta_k(\theta),$$

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial r^2}=\frac{k(k-1)}{a^2}\left(\frac{r}{a}\right)^{k-2}\Theta_k(\theta)=\frac{k(k-1)}{r^2}R_k(r)\Theta_k(\theta),$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_k}{\partial \theta^2}=\frac{1}{r^2}(-k^2a_k\cos k\theta-k^2b_k\sin k\theta)R_k(r)=-\frac{k^2}{r^2}R_k(r)\Theta_k(\theta),$$

从而

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\partial^2 u_k}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u_k}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_k}{\partial \theta^2}\right]=0.$$

又由 $g(\theta)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续， $g'(\theta)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内分段连续，且 $g(-\pi)=g(\pi)$ 可知， $g(\theta)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可展开成 Fourier 级数

$$g(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta),$$

其中

$$\begin{cases} a_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}g(\tau)\cos k\tau\mathrm{d}\tau, & k=0,1,2,\cdots, \\ b_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}g(\tau)\sin k\tau\mathrm{d}\tau, & k=1,2,\cdots. \end{cases}$$

另一方面，由 $u_k(r,\theta)\in C(\overline{Q}_a)$ 及级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(r,\theta)$ 在 $\overline{Q}_a$ 上一致收敛于 $u(r,\theta)$ 可知，对 $\forall\,\theta\in[-\pi,\pi]$, 由 Fourier 系数的唯一性可得

$$u(a,\theta)=\lim_{r\to a^-}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}u_k(r,\theta)\right]=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}u_k(a,\theta)=g(\theta).$$ ▮

在定理 4.2.2 的证明中可以看到，只要 $g(\theta)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上有界可积，由 (4.2.6) 式确定的级数在 $r<a$ 内满足 Laplace 方程，于是可以在较弱的条件下得到圆域内的 Dirichlet 问题解的积分表达式.

定理 4.2.3 (圆域内的 Dirichlet 问题)

设 $g(\theta)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，且满足 $g(-\pi)=g(\pi)$. 则边值问题 (4.2.3) 的解为

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int -\pi^{\pi}\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\theta-\tau)+r^2}g(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{4.2.7}$$

称公式 (4.2.7) 为 Poisson 公式，右端的积分称为圆域内的 Poisson 积分.

证明 对 $\forall\,\eta \in (0,1]$, 记

$$Q_\eta = \{(r,\theta)\,|;0<r<a\eta,\ -\pi<\theta<\pi\},$$

则由 $g(\theta)\in C[-\pi,\pi]$ 及定理 4.2.2 的证明过程可知，级数 (4.2.6) 确定的函数 $u(r,\theta)$ 在 Q_1 内满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0,$$

并且当 $0<\eta<1$ 时，级数 (4.2.6) 在 $\overline{Q}_\eta$ 上一致收敛.

令 $\rho=\dfrac{r}{a}$, 将 $g(\theta)$ 的 Fourier 系数 a_k 与 b_k 代入级数 (4.2.6), 并利用求和与求积分的次序可交换，得

$$\begin{aligned}u(r,\theta)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\tau)\mathrm{d}\tau+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\int_{-\pi}^{\pi}g(\tau)[\cos k\theta\cos k\tau+\sin k\theta\sin k\tau]\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}2\rho^k\cos k(\theta-\tau)\right]g(\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

另一方面，由 Euler 公式可知，当 $0\leqslant\rho<1$ 时，有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}2\rho^k\cos k(\theta-\tau)&=\sum_{k=1}^{\infty}[\rho^k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\theta-\tau)}+\rho^k\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\theta-\tau)}]\\&=\frac{\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\tau)}}{1-\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\tau)}}+\frac{\rho\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta-\tau)}}{1-\rho\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta-\tau)}}\end{aligned}$$

从而由

$$\begin{aligned}1+\sum_{k=1}^{\infty}2\rho^k\cos k(\theta-\tau)&=1+\frac{\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\tau)}}{1-\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\tau)}}+\frac{\rho\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta-\tau)}}{1-\rho\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta-\tau)}}\\&=\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}\end{aligned}$$

可得

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\theta-\tau)+r^2}g(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

下面证明：对 $\forall\,\theta\in[-\pi,\pi]$, 有

$$\lim_{r\to a^-}u(r,\theta)=g(\theta).$$

事实上，由 $g(\theta)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上连续可知，存在常数 $M>0$, 使得

$$\max_{-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi}|g(\theta)|\leqslant M,$$

并由 $g(-\pi)=g(\pi)$ 可知， $g(\theta)$ 可视为以 2π 为周期的周期函数.

令 $\nu=\tau-\theta$, 则

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos\nu+r^2}g(\nu+\theta)\mathrm{d}\nu,$$

并利用复变函数中的残数定理，计算可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos\nu+r^2}\mathrm{d}\nu=1,$$

于是对 $\forall\,\theta\in[-\pi,\pi]$, 有

$$u(r,\theta)-g(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos\nu+r^2}[g(\nu+\theta)-g(\theta)]\mathrm{d}\nu.$$

另一方面，对 $\forall\,\eta\in(0,\pi)$, 当 $\eta\leqslant|\nu|\leqslant\pi$ 时，由 $\cos\nu\leqslant\cos\eta$ 可得

$$a^2-2ar\cos\nu+r^2\geqslant(a-r)^2+2ar(1-\cos\eta)\geqslant 4ar\sin^2\frac{\eta}{2},$$

故当 $\dfrac{a}{2}<r<a$ 时，有

$$\frac{(a^2-r^2)|g(\nu+\theta)-g(\theta_0)|}{a^2-2ar\cos\nu+r^2}\leqslant\frac{2M(a^2-r^2)}{4ar\sin^2\dfrac{\eta}{2}}\leqslant\frac{2M(a-r)}{a\sin^2\dfrac{\eta}{2}}.$$

从而

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\eta}\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos\nu+r^2}[g(\nu+\theta)-g(\theta)]\mathrm{d}\nu\right|\leqslant\frac{M(a-r)}{a\sin^2\dfrac{\eta}{2}}.$$

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\eta}^{\pi}\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos\nu+r^2}[g(\nu+\theta)-g(\theta)]\mathrm{d}\nu\right|\leqslant\frac{M(a-r)}{a\sin^2\dfrac{\eta}{2}}.$$

综上可知，对 $\forall\,\varepsilon>0$, 由 $g(\theta)$ 连续可知，存在 $0<\eta<\pi$, 当 $|\nu|<\eta$ 时，有

$$|g(\nu+\theta)-g(\theta)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

于是由

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos\nu+r^2}\mathrm{d}\nu\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos\nu+r^2}\mathrm{d}\nu=1$$

可得

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos\nu+r^2}[g(\nu+\theta)-g(\theta)]\mathrm{d}\nu\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

对上述取定的 ε, η, M, 取 $\delta=\min\left\{\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a\varepsilon}{3M}\sin^2\dfrac{\eta}{2}\right\}$, 当 $0<a-r<\delta$ 时，由

$$\frac{a}{2}<r<a,\quad\frac{M(a-r)}{a\sin^2\dfrac{\eta}{2}}<\frac{M\delta}{a\sin^2\dfrac{\eta}{2}}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$$

可知，对 $\forall\,\theta\in[-\pi,\pi]$, 有

$$|u(r,\theta)-g(\theta)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos\nu+r^2}[g(\nu+\theta)-g(\theta)]\mathrm{d}\nu\right|<\varepsilon,$$

即对 $\forall\,\theta\in[-\pi,\pi]$, 有

$$\lim_{r\to a^-}u(r,\theta)=g(\theta).$$

▌

下面讨论圆域外的 Dirichlet 外问题

假设在圆周 $r=a$ 上给定了一个连续函数 $g(\theta)$, 且满足 $g(-\pi)=g(\pi)$, $M>0$ 为常数，则圆域外的 Dirichlet 外问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=0, & -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi,\ r>a\\ u(a,\theta)=g(\theta), & -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi,\\ |u(r,\theta)|\leqslant M, & -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi,\ r>a,\end{cases}\tag{4.2.8}$$

利用分离变量法，并注意到在 Euler 方程 (4.2.5) 的通解

$$R(r)=Cr^k+Dr^{-k}$$

中，利用 $R(r)$ 在无穷远处保持有界性，有 $C=0$, 从而完全类似于内问题的讨论，外问题 (4.2.8) 的形式解可表示为

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^k(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta),\tag{4.2.9}$$

其中

$$\begin{cases}a_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}g(\tau)\cos k\tau\mathrm{d}\tau, & k=0,1,2,\cdots,\\ b_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}g(\tau)\sin k\tau\mathrm{d}\tau, & k=1,2,\cdots.\end{cases}$$

把 a_k 和 b_k 代入 (4.2.9) 式，可得

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^k\cos k(\theta-\tau)\right]g(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

从而圆域外的 Dirichlet 外问题 (4.2.8) 的解可表示为

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r^2-a^2}{a^2-2ar\cos(\theta-\tau)+r^2}g(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

4.2.3 Poisson 方程的 Dirichlet 问题

对于二维 Poisson 方程的 Dirichlet 内问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=f(x,y), & (x,y)\in\Omega,\\ u\big|_{\partial\Omega}=g(x,y).\end{cases}$$

如果能找到它的一个特解 $W(x,y)$, 即

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=f(x,y),$$

令 $v=u-W$, 可将原 Dirichlet 内问题转化为求解如下的 Dirichlet 内问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0, \quad (x,y)\in\Omega,\\ v\big|_{\partial\Omega}=g(x,y)-W\big|_{\partial\Omega}.\end{cases}$$

如果能用前述方法求得此问题的解 v, 则 $u=v+W$ 为原问题的解. 下面用一个例子说明求解方法.

例 4.2.1 求解二维 Poisson 方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2, \quad 0<x<a,\ 0<y<b,\\ u(0,y)=0, \quad u(a,y)=0, \quad 0\leqslant y\leqslant b,\\ u(x,0)=0, \quad u(x,b)=0, \quad 0\leqslant x\leqslant a.\end{cases}$$

解 由 Poisson 方程的右端是常数可知，方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2$$

具有如下形式

$$W(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+b_1x+b_2y+c$$

的特解，其中 a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c 为待定常数.

把 $W(x,y)$ 代入到方程中，得

$$2a_{11}+2a_{22}=-2,$$

故可选取 $a_{11}=-1$, $a_{12}=a_{22}=0$, $b_1=a$, $b_2=c=0$, 从而 $W(x,y)$ 满足

$$\begin{cases}W(x,y)=ax-x^2,\\ W(0,y)=0, \quad W(a,y)=0.\end{cases}$$

设 $u(x,y)$ 是所给 Dirichlet 问题的解，令

$$v(x,y)=u(x,y)-W(x,y)=u(x,y)+x^2-ax,$$

则易验证 $v(x,y)$ 满足边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0, \quad 0<x<a,\ 0<y<b,\\ v(0,y)=0, \quad v(a,y)=0, \quad 0\leqslant y\leqslant b,\\ v(x,0)=x^2-ax, \quad v(x,b)=x^2-ax, \quad 0\leqslant x\leqslant a.\end{cases}$$

利用分离变量法可求得该边值问题的级数解为

$$v(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cosh\frac{k\pi y}{a}+b_k\sinh\frac{k\pi y}{a}\right)\sin\frac{k\pi x}{a},$$

利用非齐次边界条件

$$v(x,0)=x^2-ax=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{k\pi x}{a},$$

$$v(x,b)=x^2-ax=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cosh\frac{k\pi b}{a}+b_k\sinh\frac{k\pi b}{a}\right)\sin\frac{k\pi x}{a}$$

解得

$$a_k=a_k\cosh\frac{k\pi b}{a}+b_k\sinh\frac{k\pi b}{a},$$

从而

$$b_k=\left(1-\cosh\frac{k\pi b}{a}\right)\left(\sinh\frac{k\pi b}{a}\right)^{-1}a_k,\quad k=1,2,\cdots.$$

另一方面，利用分部积分公式，得

$$a_k=\frac{2}{a}\int_0^a(\xi^2-a\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{a}\,\mathrm{d}\xi=[(-1)^k-1]\frac{4a^2}{\pi^3k^3},\quad k=1,2,\cdots,$$

于是

$$b_k=[(-1)^k-1]\frac{4a^2}{\pi^3k^3}\left(1-\cosh\frac{k\pi b}{a}\right)\left(\sinh\frac{k\pi b}{a}\right)^{-1},\quad k=1,2,\cdots.$$

综上可知，所求 Dirichlet 问题的解为

$$u(x,y)=ax-x^2-\frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}Y_n(y)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{a},$$

其中

$$Y_n(y)=\frac{\sinh\dfrac{(2n-1)\pi(b-y)}{a}+\sinh\dfrac{(2n-1)\pi y}{a}}{\sinh\dfrac{(2n-1)\pi b}{a}},\quad n=1,2,\cdots.$$

习题 4.2

4.2.1 求解矩形域上的 Dirichlet 问题：

(1) $\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0, & 0<x<1,\ 0<y<1,\\ u(0,y)=0,\quad u(1,y)=0, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ u(x,0)=x(x-1),\quad u(x,1)=0, & 0\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad 0<x<1,\ 0<y<1, \\ u(0,y)=0, \quad u(1,y)=0, \quad 0\leqslant y\leqslant 1, \\ u(x,0)=0, \quad u(x,1)=\sin\pi x, \quad 0\leqslant x\leqslant 1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad 0<x<1,\ 0<y<1, \\ u(0,y)=0, \quad u(1,y)=\sinh\pi y\cos\pi y, \quad 0\leqslant y\leqslant 1, \\ u(x,0)=0, \quad u(x,1)=0, \quad 0\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$

4.2.2 设 A, B 为常数，求解下列 Dirichlet 问题：

(1) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0, \quad 0<r<a,\ -\pi<\theta<\pi, \\ u(a,\theta)=A\cos\theta, \quad -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0, \quad 0<r<a,\ -\pi<\theta<\pi, \\ u(a,\theta)=A+B\sin\theta, \quad -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi. \end{cases}$

4.2.3 求解 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-4, \quad r=\sqrt{x^2+y^2}<a, \\ u|_{r=a}=0. \end{cases}$$

4.2.4 在膜型扁壳渠道闸门的设计中，为了考察闸门在水压力作用下的受力情况，需要解如下的边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=py+q, \quad 0<x<a,\ 0<y<b, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \quad u(a,y)=0, \quad 0\leqslant y\leqslant b, \\ u(x,0)=0, \quad u(x,b)=0, \quad 0\leqslant x\leqslant a, \end{cases}$$

试求解之，这里 p, q 均为常数，且满足 $p<0<q$.

提示：令 $v=u+(x^2-a^2)(fy+\varphi)$, 选择 f 及 φ 使 v 满足 $\Delta v=0$.

4.3 Green 公式与 Green 函数

在本节中，除特别说明外均假设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中以分片光滑闭曲面 Γ 为边界的有界区域， $\boldsymbol{n}$ 为 Γ 的外法线方向.

在 Poisson 方程和 Laplace 方程的研究中， $\mathbb{R}^n$ 中的函数

$$K(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}} \quad (M\in\mathbb{R}^n,\ n=2)$$

或

$$K(M,M_0)=\frac{1}{\omega_n}\frac{1}{r_{MM_0}^{n-2}} \quad (M\in\mathbb{R}^n,\ n>2)$$

起着重要的作用，其中 ω_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球面的面积， $M=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ 为动点， $M_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\in\mathbb{R}^n$ 为定点， r_{MM_0} 为点 M 到点 M_0 的距离，即

$$r_{MM_0}=\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+\cdots+(x_n-x_n^0)^2}.$$

容易验证，函数 $K(M,M_0)$ 在 $\mathbb{R}^n\backslash\{M_0\}$ 内，是 Laplace 方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=0$$

的解，这种解称为 Laplace 方程的以 M_0 为定点的基本解或简称为基本解.

4.3.1 Green 公式与基本积分公式

在研究 Laplace 方程时，经常利用 Green 公式，下面给出三维空间的 Green 公式与基本积分公式.

如果函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)\in C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$, 则由散度定理得

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\iint\limits_{\Gamma}[P\cos(\boldsymbol{n},x)+Q\cos(\boldsymbol{n},y)+R\cos(\boldsymbol{n},z)]\mathrm{d}S,$$

其中 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x|rmdy\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}S$ 是 Γ 上的面积微元.

设 $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$, 选取

$$P=u(x,y,z)\,\frac{\partial v}{\partial x},\quad Q=u(x,y,z)\,\frac{\partial v}{\partial y},\quad R=u(x,y,z)\,\frac{\partial v}{\partial z},$$

则由上面的等式可得 Green 第一公式

$$\iiint\limits_{\Omega}u\Delta v\mathrm{d}V=\iint\limits_{\Gamma}u\,\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S-\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}V,$$

其中 $\dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}$ 表示沿 Γ 的外法线方向的方向导数.

在 Green 第一公式中，交换 $u(x,y,z)$ 和 $v(x,y,z)$ 的位置，得

$$\iiint\limits_{\Omega}v\Delta u\mathrm{d}V=\iint\limits_{\Gamma}v\,\frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S-\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}V,$$

将上述两个等式相减得到 Green 第二公式

$$\iiint\limits_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}V=\iint\limits_{\Gamma}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}-v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S.$$

容易验证， Green 第二公式对 $\forall\, u$, $v\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ 都是成立的.

在 Ω 内任意取定一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 在 Green 第二公式中，取 v 为基本解，即

$$v(x,y,z)=\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}=\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}},$$

这样函数值 $u(M_0)$ 就可以用体积分与面积分的一个和式来表示，这一事实由下述定理给出.

定理 4.3.1 (基本积分公式)

如果函数 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, 则对 $\forall\, M_0 \in \Omega$, 有

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Gamma}\left[\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)\right]\mathrm{d}S - \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{r_{MM_0}}\,\Delta u\mathrm{d}V. \tag{4.3.1}$$

证明 对 $\forall\, M_0 \in \Omega$, 以 M_0 为心、以充分小的正数 ε 为半径作闭球 $B_\varepsilon \subset \Omega$, 则函数 $\dfrac{1}{r_{MM_0}}$ 关于变量 $M(x,y,z)$ 在开区域 $\Omega\backslash B_\varepsilon$ 内具有连续的二阶偏导数，在闭区域 $\overline{\Omega\backslash B_\varepsilon}$ 上具有连续的一阶偏导数，且

$$\Delta\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) = 0,$$

于是由 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, 并应用 Green 第二公式，得

$$\iint\limits_{\Gamma\cup\partial B_\varepsilon}\left[u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) - \frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S = -\iiint\limits_{\Omega\backslash B_\varepsilon}\frac{1}{r_{MM_0}}\,\Delta u\,\mathrm{d}V.$$

另一方面，在球面 ∂B_ε 上，由 $\boldsymbol{n}$ 的方向是从球面指向球心可得

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) = \frac{1}{r_{MM_0}^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \quad (M \in B_\varepsilon),$$

故由 $u \in C^2(\Omega)$, 并根据积分中值定理可知，存在 M_ε^*, $M_\varepsilon^{**} \in B_\varepsilon$, 使得

$$\iint\limits_{\partial B_\varepsilon} u(M)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)\mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\partial B_\varepsilon} u(M)\mathrm{d}S = 4\pi u(M_\varepsilon^*),$$

$$\iint\limits_{\partial B_\varepsilon}\frac{1}{r_{MM_0}}\,\frac{\partial u(M)}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{\partial B_\varepsilon}\frac{\partial u(M)}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S = 4\pi\varepsilon\,\frac{\partial u(M_\varepsilon^{**})}{\partial \boldsymbol{n}}.$$

从而

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{\partial B_\varepsilon} u(M)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)\mathrm{d}S = \lim_{\varepsilon\to 0} 4\pi u(M_\varepsilon^*) = 4\pi u(M_0),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{\partial B_\varepsilon}\frac{1}{r_{MM_0}}\,\frac{\partial u(M)}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \lim_{\varepsilon\to 0} 4\pi\varepsilon\,\frac{\partial u(M_\varepsilon^{**})}{\partial \boldsymbol{n}} = 0.$$

又由 $u \in C^2(\Omega)$ 可知， u 在闭球体 B_ε 上有界，故由

$$\iiint\limits_{B_\varepsilon}\frac{1}{r_{MM_0}}\,\mathrm{d}V = \int_0^\varepsilon \mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\varepsilon^2$$

可得

$$\left|\iiint\limits_{B_\varepsilon}\frac{1}{r_{MM_0}}\Delta u\,\mathrm{d}V\right|\leqslant 2\pi\varepsilon^2\max_{M\in B_\varepsilon}|u(M)|,$$

从而

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint\limits_{B_\varepsilon}\frac{1}{r_{MM_0}}\Delta u\,\mathrm{d}V=0.$$

综上可知，对 $\forall M_0\in\Omega$ 及任意小的正数 ε, 有

$$\iint\limits_{\Gamma\cup\partial B_\varepsilon}u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\Big(\frac{1}{r_{MM_0}}\Big)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Gamma}u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\Big(\frac{1}{r_{MM_0}}\Big)\mathrm{d}S+\iint\limits_{\partial B_\varepsilon}u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\Big(\frac{1}{r_{MM_0}}\Big)\mathrm{d}S,$$

$$\iint\limits_{\Gamma\cup\partial B_\varepsilon}\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Gamma}\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S+\iint\limits_{\partial B_\varepsilon}\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S,$$

$$\iiint\limits_{\Omega\backslash B_\varepsilon}\frac{1}{r_{MM_0}}\Delta u\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{r_{MM_0}}\Delta u\,\mathrm{d}V-\iiint\limits_{B_\varepsilon}\frac{1}{r_{MM_0}}\Delta u\,\mathrm{d}V,$$

从而由 ε 的任意性可得

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Gamma}\Big[\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\Big(\frac{1}{r_{MM_0}}\Big)\Big]\mathrm{d}S-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{r_{MM_0}}\Delta u\mathrm{d}V.$$ ▌

基本积分公式 (4.3.1) 也称为 Green 第三公式，它表明函数 u 的值可用 Ω 内 Δu 的值与边界 $\partial\Omega$ 上 u 及 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 的值表示.

类似地可得到二维空间的 Green 公式与调和函数的积分表达式.

假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 是以逐段光滑的闭曲线 Γ 为边界的有界区域，$\boldsymbol{n}$ 为 Γ 的外法线方向. 如果 $u,\ v\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$, 则有 Green 第一公式

$$\iint\limits_{\Omega}u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\Gamma u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S-\iint\limits_{\Omega}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

Green 第二公式

$$\iint\limits_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\Gamma\Big(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}-v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big)\mathrm{d}S,$$

对 $\forall M_0\in\Omega$, 有二维基本积分公式

$$u(M_0)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\Big[\ln\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\Big(\ln\frac{1}{r_{MM_0}}\Big)\Big]\mathrm{d}S-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}\ln\frac{1}{r_{MM_0}}\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

上面所给的基本积分公式是在假设 Ω 为有界区域时得到的. 如果 Ω 为无界区域，只要对 $u(M)$ 在无穷远处加上适当的衰减条件，这些公式仍成立.

以三维情形为例，如果 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, 且

$$u(M) = O\left(\frac{1}{r_{OM}^{\alpha}}\right), \quad \frac{\partial u(M)}{\partial \boldsymbol{n}} = O\left(\frac{1}{r_{OM}^{1+\alpha}}\right) \quad (r_{OM} \to \infty),$$

则基本积分公式 (4.3.1) 仍然成立，其中 α 为正常数.

4.3.2　Green 函数

设 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, 且满足 $\Delta u = 0$, 利用基本积分公式，可得到调和函数的基本积分公式，即对 $\forall\, M_0(x_0, y_0.z_0) \in \Omega$, 有

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Gamma} \left[\frac{1}{r_{MM_0}} \frac{\partial u(M)}{\partial \boldsymbol{n}} - u(M) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)\right] \mathrm{d}S. \tag{4.3.2}$$

公式 (4.3.2) 使我们想到能否用它来解 Laplace 方程的边值问题. 但由于在这个公式中需要同时知道 u 与 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 在 Γ 上的数值, 因此还不能直接利用它来解 Dirichlet 问题或 Nenmann 问题.

例如对于 Dirichlet 问题， u 在 Γ 上的值是给定的，但 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 在 Γ 上的值是未知的，必须在整个区域 Ω 上求得问题的解以后才能决定，因此不能直接利用公式 (4.3.2) 来求解，对 Nenmann 问题的情形也类似. 那么能不能有一个调和方程的定解问题，在区域 Ω 的边界 Γ 上同时给定 u 及 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 的值作为边界条件呢？回答是否定的. 这样，为了利用调和函数的基本积分公式来求解 Dirichlet 问题，必须设法在公式 (4.3.2) 消去含有 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 的一项，这就需要引进下述的 Green 函数的概念.

考察这样一个函数 $h(M, M_0)$, 它在 $\overline{\Omega}$ 上有连续的一阶偏导数，在 Ω 内关于变量 M 是调和函数，即对 $\forall\, M \in \Omega$, 有

$$\Delta h(M, M_0) = 0.$$

如果假设 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, 且满足 $\Delta u = 0$, 则由 Green 第二公式可得

$$\iint\limits_{\Gamma} \left[h(M, M_0) \frac{\partial u(M)}{\partial \boldsymbol{n}} - u(M) \frac{\partial h(M, M_0)}{\partial \boldsymbol{n}}\right] \mathrm{d}S = 0,$$

从而由公式 (4.3.2) 可得

$$u(M_0) = \iint\limits_{\Gamma} \left[G(M, M_0) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u(M) \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial \boldsymbol{n}}\right] \mathrm{d}S,$$

其中

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + h(M, M_0) \quad (M \in \Omega).$$

容易验证 $G(M, M_0)$ 在 Ω 内除点 $M = M_0$ 外，关于变量 M 处处满足

$$\Delta G(M, M_0) = 0,$$

但在点 $M = M_0$ 处，$G(M, M_0)$ 有形如 $\dfrac{1}{4\pi r_{MM_0}}$ 的奇性，故只要取 $h(M, M_0)$ 满足

$$h(M, M_0)\big|_\Gamma = -\frac{1}{4\pi r_{MM_0}},$$

就有

$$u(M_0) = -\iint_\Gamma u(M)\,\frac{\partial G(M, M_0)}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S,$$

从而 Laplace 方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, & (x, y, z) \in \Omega, \\ u\big|_\Gamma = g(x, y, z) \end{cases}$$

的解可以表示为

$$u(M_0) = -\iint_\Gamma g(M)\,\frac{\partial G(M, M_0)}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S \quad (M_0 \in \Omega). \tag{4.3.3}$$

称函数 $G(M, M_0)$ 为 Green 函数，下面给出比较确切的定义.

定义 4.3.1 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的区域，Γ 为 Ω 的边界，$M_0 \in \Omega$. 如果 $h(M, M_0)$ 关于变量 $M \in \Omega$ 是 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta h(M, M_0) = 0, & M \in \Omega, \\ h(M, M_0)\big|_\Gamma = -\dfrac{1}{4\pi r_{MM_0}} \end{cases}$$

的解，则称函数

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + h(M, M_0) \quad (M \in \Omega\backslash\{M_0\}$$

为三维 Laplace 方程关于 Ω 的 Dirichlet 问题的 Green 函数或简称 Green 函数.

从上面推导过程可知，如果 Green 函数 $G(M, M_0)$ 已经求得，那么三维 Laplace 方程的 Dirichlet 问题的解可由 (4.3.3) 表示，这种求解方法称为 Green 函数法. 显然要知道区域 Ω 上的 Green 函数，必须先解一个特殊的 Dirichlet 问题.

对于一般区域，要证明这种特殊的 Dirichlet 问题解的存在性，通常和证明在这区域上一般 Dirichlet 问题解的存在性同样困难，因此 Green 函数法并不能有效地解决一般区域上的三维 Laplace 方程的 Dirichlet 问题，但对某些特殊的简单区域，Green 函数却是可用初等方法求得的. 在介绍这种 Green 函数法之前，先在假设 Green 函数存在的前提下给出 Green 函数的一些重要性质.

性质 4.3.1 Green 函数关于变量 M 满足

$$\begin{cases} \Delta G(M,M_0)=0, & M\in\Omega\backslash\{M_0\}, \\ G(M,M_0)=0, & M\in\Gamma, \end{cases}$$

并且当 $M\to M_0$ 时，$G(M,M_0)$ 与 $\dfrac{1}{4\pi r_{MM_0}}$ 等价.

性质 4.3.2 在区域 $\Omega\backslash\{M_0\}$ 内，有不等式

$$0<G(M,M_0)<\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}.$$

性质 4.3.3 设 $M_1, M_2\in\Omega$ 且 $M_1\neq M_2$, 则有

$$G(M_1,M_2)=G(M_2,M_1).$$

性质 4.3.4 对任意的 $M_0\in\Omega$, 有

$$\iint_{\Gamma}\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S=-1.$$

对于二维情形，可类似地定义 Green 函数.

定义 4.3.2 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的区域，Γ 为 Ω 的边界，$M_0\in\Omega$. 如果 $h(M,M_0)$ 关于变量 $M\in\Omega$ 是 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta h(M,M_0)=0, & M\in\Omega, \\ h(M,M_0)\big|_{\Gamma}=-\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r_{MM_0}} \end{cases}$$

的解，则称函数

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}}+h(M,M_0),\quad (M\in\Omega\backslash\{M_0\}$$

为二维 Laplace 方程关于 Ω 的 Dirichlet 问题的 Green 函数，简称 Green 函数.

利用二维基本积分公式，可得到二维调和函数的基本积分公式

$$u(M_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\left[\ln\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u(M)}{\partial \boldsymbol{n}}-u(M)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\ln\frac{1}{r_{MM_0}}\right)\right]\mathrm{d}S.$$

于是利用 Green 函数可得二维 Laplace 方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, & (x,y)\in\Omega, \\ u(x,y)\big|_{\Gamma}=g(x,y) \end{cases}$$

的解为

$$u(M_0)=-\int_{\Gamma}g(M)\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S\quad (M_0\in\Omega).$$

由上面讨论可知，如果能够求出区域 Ω 上的 Dirichlet 问题的 Green 函数，就可得到该 Dirichlet 问题的解，求区域 Ω 上的 Dirichlet 问题的 Green 函数，最常见的方法是静电源像法.

从静电学中知道，若在点 M_0 处放置一单位正电荷 (称为点源), 它对另一点 M 所产生的电势就是 $\dfrac{1}{4\pi r_{MM_0}}$. 而我们要求出的 Green 函数应满足

$$G(M,M_0)\big|_\Gamma=\left[\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}+h(M,M_0)\right]\bigg|_\Gamma=0.$$

事实上，当 Ω 是几类特殊的对称区域时，可假设在空间中另有一些点电荷 (称为点源的源像). 它们在 M 点产生的电势记为 $h(M,M_0)$, 且与原单位电荷所产生的电势 $\dfrac{1}{4\pi r_{MM_0}}$ 在边界 Γ 上恰巧抵消，即

$$\left[\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}+h(M,M_0)\right]\bigg|_\Gamma=0.$$

例如，假设可以在区域 Ω 外找一点 M_1, 其位置一般依赖于 M_0, 当在 M_1 点放一个电量为 λ 的电荷时，所产生的电势为 $\dfrac{\lambda}{4\pi r_{MM_1}}$, 它在 Ω 内调和，在 Γ 上的值恰好等于以 M_0 为定点的基本解 $\dfrac{1}{4\pi r_{MM_0}}$, 故选取

$$h(M,M_0)=-\frac{\lambda}{4\pi r_{MM_1}}$$

即可满足要求. 当 Γ 是平面或球面时，利用初等几何的知识，M_1 是容易求得的.

例 4.3.1 求关于球的 Dirichlet 问题的 Green 函数.

解 设球心为 O 点，半径为 R, 球的内部为 B, 球面为 S(图 4.3.1).

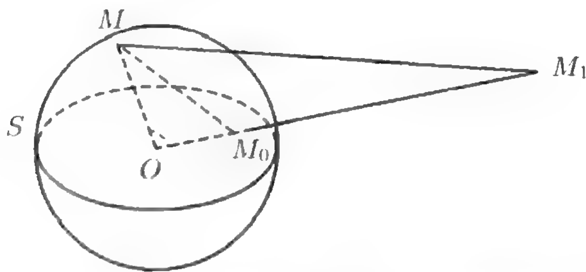


图 4.3.1

任取一点 $M_0\in B\backslash\{O\}$, 在球外找一点 M_1, 使得对 $\forall\, M\in S$ 都满足

$$\frac{1}{r_{MM_0}}=\frac{\lambda}{r_{MM_1}},$$

其中 λ 为待定常数.

由初等几何的知识可知，M_0 关于球面 S 的反演点 M_1 在 $\overrightarrow{OM_0}$ 的延长线上，且满足 $r_{OM_0} \cdot r_{OM_1} = R^2$, 即对 $\forall\, M \in S$, 有

$$\frac{r_{OM_1}}{r_{OM}} = \frac{r_{OM}}{r_{OM_0}},$$

故 $\triangle MOM_0$ 与 $\triangle M_1OM$ 相似，从而对 $\forall\, M \in S$, 由 $r_{OM} = R$ 可得

$$\frac{r_{MM_1}}{r_{MM_0}} = \frac{r_{OM_1}}{r_{OM}} = \frac{R}{r_{OM_0}} = \lambda,$$

即 λ 是一个不随 M 而变化的常数.

记 $r_{OM_0} = \rho_0$, 选取

$$h(M, M_0) = -\frac{1}{4\pi}\frac{R}{\rho_0}\,\frac{1}{4\pi r_{MM_1}},$$

从而所求的 Green 函数为

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{R}{\rho_0}\,\frac{1}{r_{MM_1}}\right).$$

下面利用 Green 函数来求解 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, \quad M \in B, \\ u\big|_S = g(M). \end{cases} \tag{4.3.4}$$

我们需要先计算 $\dfrac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}$ 在球面 S 上的值.

对 $\forall\, M \in S$, 记 $\rho = r_{OM}$, $\rho_1 = r_{OM_1}$, γ 为 OM_0 与 OM 的夹角，则

$$r_{MM_0} = \sqrt{\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho\cos\gamma},$$

并由 $\rho_0\rho_1 = R^2$ 可得

$$r_{MM_1} = \sqrt{\rho_1^2 + \rho^2 - 2\rho_1\rho\cos\gamma} = \frac{1}{\rho_0}\sqrt{\rho_0^2\rho^2 - 2R^2\rho_0\rho\cos\gamma + R^4},$$

故有

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho\cos\gamma}} - \frac{R}{\sqrt{\rho_0^2\rho^2 - 2R^2\rho_0\rho\cos\gamma + R^4}}\right],$$

从而由

$$\frac{\partial G}{\partial \rho} = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\rho - \rho_0\cos\gamma}{(\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(\rho_0^2\rho - R^2\rho_0\cos\gamma)R}{(\rho_0^2\rho^2 - 2R^2\rho_0\rho\cos\gamma + R^4)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

可知，对 $\forall\, M \in S$, 有

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\rho=R} = \left.\frac{\partial G}{\partial \rho}\right|_{\rho=R} = -\frac{1}{4\pi R}\,\frac{R^2 - \rho_0^2}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}.$$

由式 (4.3.3) 可知，球的 Dirichlet 问题 (4.3.4) 的解为

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R}\iint\limits_S \frac{R^2-\rho_0^2}{(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}\, g(M)\,\mathrm{d}S, \tag{4.3.5}$$

利用球面坐标系可知，球的 Dirichlet 问题 (4.3.4) 的解可写为

$$u(\rho_0,\theta_0,\varphi_0) = \frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{R^2-\rho_0^2}{(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}\, g(R,\theta,\varphi)\,\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta,$$

其中 $M_0(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)$ 是球 B 内部的点， $M(R,\theta,\varphi)$ 是球面 S 上的点，且

$$\cos\gamma = \cos\varphi\cos\varphi_0 + \sin\varphi\sin\varphi_0\cos(\theta-\theta_0).$$

公式 (4.3.5) 称为球的 Poisson 公式. 这里应当注意，在推导公式 (4.3.3) 时，假定了 Laplace 方程的 Dirichlet 问题的解在 $\overline{\Omega}$ 上具有连续的一阶偏导数，但在实际应用时，因为事先并不知道这个 Dirichlet 问题在 $\overline{\Omega}$ 上具有连续的一阶偏导数的解存在，所以 (4.3.3) 只给出问题的形式解. 因此还需验证：当 $g\in C(S)$ 时，球的 Poisson 公式 (4.3.5) 所表示的函数 u 就是 Dirichlet 问题 (4.3.4) 的解.

定理 4.3.2 (球的 Dirichlet 问题)

设 $g\in C(S)$, 则由 Poisson 公式 (4.3.5) 确定的函数 u 是 Dirichlet 问题 (4.3.4) 的解.

证明 由关于球的 Dirichlet 问题的 Green 函数表达式及 Green 函数的性质可知，当 M, $M_0\in B$ 且 $M\neq M_0$ 时，由 $G(M,M_0)=G(M_0,M)$ 可得

$$\Delta_{M_0} G(M,M_0) = \Delta_{M_0} G(M_0,M) = 0,$$

从而由 G 是各个变量的无穷可微函数可得

$$\Delta_{M_0}\partial_M G(M,M_0) = \partial_M \Delta_{M_0} G(M,M_0) = 0,$$

其中 ∂_M 表示关于变量 M 在任意方向上的一阶偏导数.

另一方面，由 G 在 S 上的光滑性可知，式 (4.3.3) 中的求导与积分可交换顺序，从而对 $\forall\, M_0\in B$, 有

$$\Delta_{M_0} u(M_0) = \Delta_{M_0}\left[-\iint\limits_S g(M)\,\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S\right] = -\iint\limits_S g(M)\,\Delta_{M_0}\Big(\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\Big)\mathrm{d}S = 0,$$

即由式 (4.3.5) 表示的函数 $u(M_0)$ 满足 Dirichlet 问题 (4.3.4) 中的 Laplace 方程.

下面证明：在球面 S 上， $u(M_0)$ 满足所给的边界条件，即对 $\forall\, M^*\in S$, 有

$$\lim_{M_0\to M^*} u(M_0) = g(M^*).$$

事实上，由 $g(M)$ 在球面 S 上连续可知，存在常数 $C>0$, 使得

$$\max_{M\in S}|g(M)|\leqslant C.$$

对 $\forall\, M_0\in B$ 及 $\forall\, M^*\in S$, 由 Green 函数的性质 4.3.4 可得

$$g(M^*)=-g(M^*)\iint\limits_S\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S=-\iint\limits_S g(M^*)\,\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S.$$

于是对 $\forall\, M_0\in B$ 及 $\forall\, M^*\in S$, 有

$$u(M_0)-g(M^*)=-\iint\limits_S[g(M)-g(M^*)]\,\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S.$$

另一方面，对 $\forall\, M^*\in S$ 及 $\forall\,\varepsilon>0$, 由 $g(M)$ 在 S 上连续可知，存在 $\eta>0$, 使得 $\forall\, M\in S$, 当 $r_{MM^*}=|M-M^*|<\eta$ 时，有

$$|g(M)-g(M^*)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

从而对 $\forall\, M_0\in B$ 且 $M_0\neq O$, 由

$$-\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial \boldsymbol{n}}\Big|_{M\in S}=\frac{1}{4\pi R}\,\frac{R^2-\rho_0^2}{(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}>0$$

及 Green 函数的性质 4.3.4 可得

$$\left|-\iint\limits_\sigma[g(M)-g(M^*)]\,\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S\right|<\frac{\varepsilon}{2}\iint\limits_S\Big(-\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial \boldsymbol{n}}\Big)\mathrm{d}S=\frac{\varepsilon}{2}.$$

其中 σ 是以 M^* 为心、以 η 为半径的开球与 S 所得的曲面，即

$$\sigma=\{M\mid M\in S,\ \text{且}\ r_{MM^*}=|M-M^*|<\eta\}.$$

对上述取定的 $\varepsilon>0$, $\eta>0$, 选取满足条件 $0<\eta_1<\eta$ 的 η_1, 使得对 $\forall\, M_0\in B$, 当 $|M_0-M^*|<\eta_1$ 时，有

$$0<\cos\gamma_0=\max_{M\in\partial\sigma}\cos(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM_0}})<1,$$

故当 $|M_0-M^*|<\eta_1$ 时，对 $\forall\, M\in S\backslash\sigma$, 有

$$\cos\gamma=\cos(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM_0}})\leqslant\cos\gamma_0,$$

从而由

$$\begin{aligned}R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma&=(R-\rho_0)^2+2R\rho_0(1-\cos\gamma)\\&\geqslant 2R\rho_0(1-\cos\gamma_0)>0\end{aligned}$$

可知，当 $|M_0 - M^*| < \eta_1$，$\frac{R}{2} \leqslant \rho_0 < R$ 时，对 $\forall\, M \in S\backslash\sigma$，由

$$\left| -\frac{\partial G(MM_0)}{\partial \boldsymbol{n}} \right| = \frac{1}{4\pi R} \frac{R^2-\rho_0^2}{(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\leqslant \frac{R+\rho_0}{4\pi R} \frac{R-\rho_0}{[2R\rho_0(1-\cos\gamma_0)]^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{R-\rho_0}{2\pi R^3(1-\cos\gamma_0)^{\frac{3}{2}}}$$

可得

$$\left| -\iint_{S\backslash\sigma} [g(M)-g(M^*)] \frac{\partial G(MM_0)}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S \right| \leqslant 2C \iint_{S\backslash\sigma} \left| \frac{\partial G(MM_0)}{\partial \boldsymbol{n}} \right| \mathrm{d}S$$
$$\leqslant \frac{4C}{R(1-\cos\gamma_0)^{\frac{3}{2}}}(R-\rho_0).$$

综上可知，对 $\forall\, M^* \in S$ 及 $\forall\, \varepsilon > 0$，选取 $\delta = \min\left\{\eta_1,\ \frac{R}{2},\ \frac{R(1-\cos\gamma_0)^{\frac{3}{2}}}{4C}\ \frac{\varepsilon}{2}\right\}$，使得对 $\forall\, M_0 \in B$，当 $0 < r_{M_0M^*} = |M_0 - M^*| < \delta$ 时，由 $R \leqslant r_{OM_0} + r_{M_0M^*}$ 可得

$$r_{OM_0} \geqslant R - r_{M_0M^*} \geqslant R - \delta \geqslant \frac{R}{2},$$

$$|R-\rho_0| = |R - r_{OM_0}| \leqslant r_{M_0M^*} \leqslant \delta \leqslant \frac{R(1-\cos\gamma_0)^{\frac{3}{2}}}{4C}\ \frac{\varepsilon}{2},$$

从而由

$$\left| -\iint_{\sigma} [g(M)-g(M^*)]\ \frac{\partial G(M,M_0)}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

及

$$\left| -\iint_{S\backslash\sigma} [g(M)-g(M^*)] \frac{\partial G(MM_0)}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S \right| \leqslant \frac{4C(R-\rho_0)}{R(1-\cos\gamma_0)^{\frac{3}{2}}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

可得

$$|u(M_0) - g(M^*)| = \left| -\iint_{S} [g(M)-g(M^*)]\ \frac{\partial G(M,M_0)}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S \right| < \varepsilon.$$ ▮

例 4.3.2 设 $\Omega = \{(x,y,z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z > 0\}$，且 Γ 为区域 Ω 的边界．求 Laplace 方程在上半空 Ω 的 Dirichlet 问题的 Green 函数，并由此解边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (x,y,z) \in \Omega, \\ u|_{\Gamma} = g(x,y). \end{cases} \tag{4.3.6}$$

解 选取坐标系如图 4.3.2，则 Γ 就是 xOy 平面．

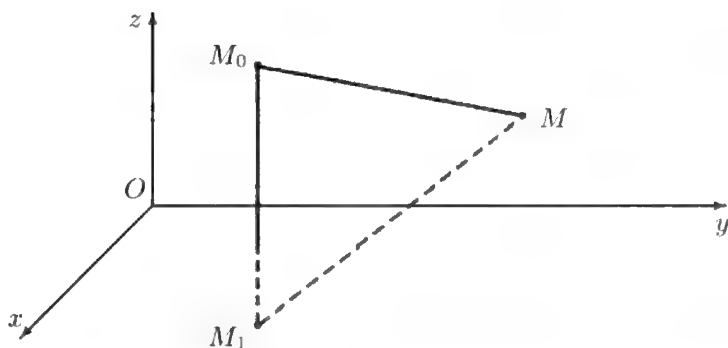


图 4.3.2

任意取定一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$, 则利用对称性可知, M_0 关于 xOy 面的对称点为 $M_1(x_0,y_0,-z_0)$, 故对 $\forall\, M(x,y,0)\in\Gamma$, 有

$$r_{_{MM_0}}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}=r_{_{MM_1}}.$$

即对 $\forall\, M(x,y,0)\in\Gamma$, 有

$$\frac{1}{4\pi r_{_{MM_0}}}=\frac{1}{4\pi r_{_{MM_1}}},$$

从而区域 Ω 上的 Dirichlet 问题的 Green 函数为

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi r_{_{MM_0}}}-\frac{1}{4\pi r_{_{MM_1}}}.$$

另一方面, 由于 Γ 的外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 与 z 轴方向相反, 故有

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\Big|_{z=0}&=-\frac{\partial G}{\partial z}\Big(\frac{1}{4\pi r_{_{MM_0}}}-\frac{1}{4\pi r_{_{MM_1}}}\Big)\Big|_{z=0}\\&=-\Big[-\frac{1}{4\pi}\,\frac{z-z_0}{r^3_{_{MM_0}}}+\frac{1}{4\pi}\,\frac{z+z_0}{r^3_{_{MM_1}}}\Big]\Big|_{z=0}\\&=-\frac{1}{2\pi}\,\frac{z_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{\frac{3}{2}}},\end{aligned}$$

从而所求边值问题 (4.3.6) 的形式解为

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{z_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(x,y)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4.3.7}$$

例 4.3.3 求圆域内的 Dirichlet 问题的 Green 函数, 并由此解边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, & r<R,\\ u(R,\theta)=g(\theta), & -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi,\end{cases} \tag{4.3.8}$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, θ 为极坐标的极角.

解 设圆心为 O 点，半径为 R，圆的内部为 B，圆周为 S(图 4.3.3).

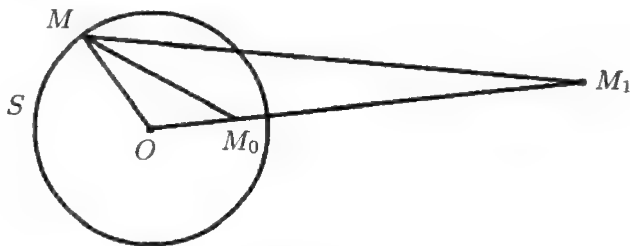


图 4.3.3

任取一点 $M_0 \in B\backslash\{O\}$，则由初等几何的知识可知，M_0 关于圆周 S 的反演点 M_1 在 $\overrightarrow{OM_0}$ 的延长线上，且满足 $r_{OM_0} \cdot r_{OM_1} = R^2$，即对 $\forall\, M \in S$，有

$$\frac{r_{OM_1}}{r_{OM}} = \frac{r_{OM}}{r_{OM_0}},$$

故 $\triangle MOM_0$ 与 $\triangle M_1OM$ 相似，从而对 $\forall\, M \in S$，由 $r_{OM} = R$ 可得

$$\frac{r_{MM_1}}{r_{MM_0}} = \frac{r_{OM_1}}{r_{OM}} = \frac{R}{r_{OM_0}}.$$

记 $r_{OM_0} = \rho_0$，选取

$$h(M, M_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{\rho_0} \frac{1}{r_{MM_1}},$$

从而所求的 Green 函数为

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{\rho_0} \frac{1}{r_{MM_1}}.$$

另一方面，对 $\forall\, M \in S$，记 $\rho = r_{OM}$，$\rho_1 = r_{OM_1}$，γ 为 OM_0 与 OM 的夹角，则

$$r_{MM_0} = \sqrt{\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho\cos\gamma},$$

并由 $\rho_0\rho_1 = R^2$ 可得

$$r_{MM_1} = \sqrt{\rho_1^2 + \rho^2 - 2\rho_1\rho\cos\gamma} = \frac{1}{\rho_0}\sqrt{\rho_0^2\rho^2 - 2R^2\rho_0\rho\cos\gamma + R^4},$$

故有

$$G = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho\cos\gamma}} - \ln\frac{R}{\sqrt{\rho_0^2\rho^2 - 2R^2\rho_0\rho\cos\gamma + R^4}}\right],$$

从而由

$$\frac{\partial G}{\partial \rho} = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\rho - \rho_0\cos\gamma}{\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho\cos\gamma} + \frac{\rho_0^2\rho - R^2\rho_0\cos\gamma}{\rho_0^2\rho^2 + R^4 - 2R^2\rho_0\rho\cos\gamma}\right]$$

可知, 对 $\forall M \in S$, 有

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\rho=R} = \left.\frac{\partial G}{\partial \rho}\right|_{\rho=R} = -\frac{1}{2\pi R}\frac{R^2-\rho_0^2}{(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}.$$

利用极坐标系

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \quad 0 \leqslant \rho < +\infty, \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{cases}$$

可知, 对 $M_0(\rho_0, \theta_0) \in B$, $M(\rho, \theta) \in S$, 由 $\overrightarrow{OM}$ 和 $\overrightarrow{OM_0}$ 的方向分别为 $(\cos\theta_0, \sin\theta_0)$ 与 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 可得

$$\cos\gamma = \cos\theta_0\cos\theta + \sin\theta_0\sin\theta = \cos(\theta_0-\theta).$$

从而圆的 Dirichlet 问题 (4.3.8) 的解可写为

$$u(\rho_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)}g(\theta)\,\mathrm{d}\theta. \qquad (4.3.9)$$

公式 (4.3.9) 与本章第 2 节所得公式 (4.2.7) 相同. 类似于定理 4.3.2 的证明, 可以得到下面定理.

定理 4.3.3 (圆域内的 Dirichlet 内问题)

设 $g(\theta) \in C(S)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 则由公式 (4.3.9) 确定的函数 u 是 Dirichlet 问题 (4.3.8) 的解.

4.3.3　二维单连通区域上的 Green 函数

由上面的讨论, 我们已对一些特殊的区域求得了 Green 函数. 在二维情形中, 还可借助复变函数论中保形变换的方法求得一般单连通区域上的 Green 函数.

设 Ω 为 xOy 平面上以逐段光滑曲线 Γ 为边界的单连通区域, B 为 $\xi O\eta$ 平面上的单位圆内部, S 为 B 的边界. 记 $z = x+iy$, $z_0 = x_0+iy_0$.

任意取定一点 $(x_0, y_0) \in \Omega$, 则由关于保形变换的黎曼定理可知, 存在解析函数 $\omega(z) = f(z, z_0)$, 它将区域 $\overline{\Omega}$ 单叶地映射为 $\omega = \xi + i\eta$ 平面上的闭单位圆 $\overline{B}$, 将 Ω 的边界 Γ 映射为单位圆周 S, 将点 $z = z_0$ 映射为坐标原点 $\omega = 0$, 即

$$\left|\omega(z)\big|_{(x,y)\in\Gamma}\right| = \left|f(z, z_0)\big|_{(x,y)\in\Gamma}\right| = 1, \quad \omega(z_0) = f(z_0, z_0) = 0.$$

并且

$$\omega'(z_0) = \left.\frac{\mathrm{d}f(z, z_0)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0} \neq 0.$$

下面证明: 函数

$$G(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|f(z, z_0)|} \qquad (4.3.10)$$

为区域 Ω 上的 Green 函数.

事实上，由

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z,z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z,z_0)-f(z_0,z_0)}{z-z_0}=\frac{\mathrm{d}f(z,z_0)}{\mathrm{d}z}\Big|_{z=z_0}\neq 0$$

可知，点 $z=z_0$ 为 $\dfrac{f(z,z_0)}{z-z_0}$ 的可去奇点，故

$$F(z,z_0)=\begin{cases}\dfrac{f(z,z_0)}{z-z_0}, & z\in\overline{\Omega}\backslash\{z_0\},\\ \dfrac{\mathrm{d}f(z,z_0)}{\mathrm{d}z}, & z=z_0\end{cases}$$

为在区域 Ω 内的解析函数，并由 $\omega(z)=f(z,z_0)$ 关于变量 z 是单叶解析函数可知，函数 $F(z,z_0)$ 关于变量 z 在闭区域 $\overline{\Omega}$ 上恒不为零，从而由

$$\frac{1}{2\pi}\ln|F(z,z_0)|=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{f(z,z_0)}{z-z_0}\right|=\frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\left[\mathrm{Ln}\frac{f(z,z_0)}{z-z_0}\right]$$

可知，函数 $\dfrac{1}{2\pi}\ln\left|\dfrac{f(z,z_0)}{z-z_0}\right|$ 在 Ω 内关于变量 x 及 y 是调和函数.

另一方面，对 $\forall\,(x,y)\in\Gamma$, 则由 $f(z,z_0)\in S$ 可得 $|f(z,z_0)|=1$, 故有

$$\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{f(z,z_0)}{z-z_0}\right|\Big|_{(x,y)\in\Gamma}=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|z-z_0|}\Big|_{(x,y)\in\Gamma},$$

从而由

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|f(z,z_0)|}=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|z-z_0|}-\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{f(z,z_0)}{z-z_0}\right|$$

可知，函数

$$G(x,y;x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|f(z,z_0)|}$$

为区域 Ω 上的 Green 函数.

下面验证：当 Ω 为圆形区域时，利用式 (4.3.10) 求得的 Green 函数与例 4.3.3 中求得的 Green 函数完全相同.

设 Ω 为以原点 O 为心，以 R 为半径的圆域， $(x_0,y_0)\in\Omega$. 利用复变函数的结论可知，将 Ω 变为单位圆内部，并将 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 变为原点的保形变换为

$$\omega(z)=f(z,z_0)=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{z-z_0}{R^2-\overline{z}_0z}=\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\overline{z}_0}\frac{z-z_0}{z_1-z},$$

其中 θ 为任意常数， z_0 关于 $\partial\Omega$ 的反演点为 $z_1=\dfrac{R^2}{|z_0|^2}z_0=\dfrac{R^2}{\overline{z}_0}$.

由式 (4.3.10) 可知，所求的 Green 函数为

$$G(x,y;x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{\overline{z}_0(z_1-z)}{R(z-z_0)}\right|=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|z-z_0|}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{|z_0|}\frac{1}{|z-z_1|}.$$

上式与例 4.3.3 中求得的 Green 函数完全相同.

习题　4.3

4.3.1 试验证：当 $M \neq M_0$ 时，函数

$$h(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\ \ln\frac{1}{r_{M_0M}}$$

关于变量 M 及 M_0 为二维调和函数，其中 r_{M_0M} 为点 M_0 与 M 间的距离.

4.3.2 试验证：当 $M \neq M_0$ 时，函数

$$h(M,M_0)=\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}$$

关于变量 M 及 M_0 为三维调和函数，其中 r_{M_0M} 为点 M_0 与 M 间的距离.

4.3.3 已知当 $r\neq 0$ 时，$u(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(r)$ 是 n 维调和函数，证明：

$$f(r)=\begin{cases} C_1+C_2\ln\dfrac{1}{r}, & n=2,\\ C_1+\dfrac{C_2}{r^{n-2}}, & n>2,\end{cases}$$

其中 $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$，$C_1$，$C_2$ 为常数.

4.3.4 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为有界区域，Γ 为其边界，证明：等值面边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=f(x,y,z), & (x,y,z)\in\Omega,\\ u(x,y,z)|_{(x,y,z)\in\Gamma}=c,\\ \displaystyle\int_\Gamma\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S=A_0\end{cases}$$

有解的必要条件为

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}S=A_0,$$

其中 c 为待定常数，A_0 为已知常数.

4.3.5 若 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ 是等值面边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=f(x,y,z), & (x,y,z)\in\Omega,\\ u(x,y,z)|_{(x,y,z)\in\Gamma}=c,\\ \displaystyle\int_\Gamma\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S=A_0\end{cases}$$

的解，证明：此问题的一切解均可以表示为 u 和任一常数之和的形式，其中 c 为待定常数，A_0 为已知常数.

4.3.6 设 Ω 是以 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为球心、以 R 为半径的球，$u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$，且 u 在 Ω 内为调和函数，证明

$$u(M_0)=\frac{3}{4\pi R^3}\iiint\limits_\Omega u(M)\,\mathrm{d}V.$$

4.3.7 推导二维情形的基本积分公式.

4.3.8 证明 Green 函数的性质 4.3.3 和性质 4.3.4.

4.3.9 设 Ω 是由光滑闭曲面 Γ 围成的有界区域，其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 Γ 的外法线方向. 如果函数 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, 且 u 在 Ω 内为调和函数，证明

$$-\iint\limits_{\Gamma} \left[u(M)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) - \frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S = \begin{cases} 0, & M_0 \notin \Omega, \\ 2\pi u(M_0), & M_0 \in \Gamma, \\ 4\pi u(M_0), & M_0 \in \Omega. \end{cases}$$

4.3.10 设 u 为区域 Ω 内的二阶连续可微函数，如果对 Ω 中的任一球面 S, 都成立

$$\iint\limits_{S} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = 0.$$

证明： u 为 Ω 内的调和函数.

4.3.11 证明：处处满足平均值公式的二阶连续可微函数一定是调和函数.

4.3.12 分别用静电源像法和保形变换求半圆形区域 $\{(x,y) \mid x^2+y^2<1,\ y>0\}$ 上的 Dirichlet 问题的 Green 函数.

4.3.13 求函数 $u(r,\theta,\varphi)$, 使其在单位球内为调和函数，在单位球面上取值为 $1+2\cos 2\theta$, 这里 (r,θ,φ) 表示球坐标.

4.3.14 设 A, B 为常数. 求在以原点为心，以 a 为半径的圆中为调和函数，而在圆周 $r=a$ 上取下列值的函数：

(1) $u(r,\theta)\big|_{r=a} = A\cos\theta$;　　(2) $u(r,\theta)\big|_{r=a} = A + B\sin\theta$.

4.3.15 设 S 为以原点为圆心、以 R 为半径的圆周， $(x,y)\in S$, 试用直接计算验证

$$u = \frac{R^2-\rho_0^2}{R^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)+\rho_0^2} = \frac{R^2-x_0^2-y_0^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

关于变量 (x_0,y_0) 在圆周 S 内部为调和函数.

4.4 极值原理 解的唯一性及稳定性

从物理学上看，在整个热传导的过程中，当该物体的温度分布 u 达到稳定状态，即温度不随时间 t 变化时， u 就应该满足 Laplace 方程，因此对于调和函数来说也应成立极值原理. 本节将以三维情形为例，给出调和函数的极值原理，并用它来讨论 Laplace 方程和 Poisson 的边值问题解的唯一性及稳定性，最后给出调和函数的一些重要性质，其他维数的情形可完全类似地讨论.

4.4.1 极值原理

定理 4.4.1 设 Ω 是以光滑闭曲面 $\partial\Omega$ 为边界的有界区域，函数 u 在 Ω 内是调和函数，在 $\overline{\Omega}$ 上有连续的一阶偏导数，则

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = 0,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 $\partial\Omega$ 的外法线方向.

证明 选取 $v\equiv 1$, 则由 $u,v\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ 及 u 在 Ω 内是调和函数可得

$$\Delta u\big|_{\Omega}=0,\quad \Delta v\big|_{\Omega}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\Big|_{\partial\Omega}=0.$$

于是由 Green 第二公式可得

$$\iint\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S=0.$$ ▌

推论 4.4.1 Neumann 内问题

$$\begin{cases}\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, & (x,y,z)\in\Omega,\\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big|_{\partial\Omega}=g(x,y,z)\end{cases}$$

有解的必要条件是

$$\iint\limits_{\partial\Omega}g(x,y,z)\,\mathrm{d}S=0.$$

在定理 4.4.1 中, $\iint\limits_{\partial\Omega}\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 的物理意义是，当 u 表示 Ω 中无热源的定常状态的温度分布函数时，其通过边界曲面 $\partial\Omega$ 的热流量总和必须为零.

为了以下叙述方便，对 $\forall\, a>0$, 用 $B_a(M_0)$ 表示以 M_0 为心、以 a 为半径的开球，而 $S_a(M_0)$ 则表示这个开球的球面.

定理 4.4.2 (平均值定理)

设 u 在区域 Ω 内是调和函数. 对 $\forall\, M_0\in\Omega$ 及 $\forall\, a>0$, 如果 $\overline{B}_a(M_0)\subset\Omega$, 则 u 在点 M_0 的值等于 u 在球面 $S_a(M_0)$ 上的积分平均值，即

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi a^2}\iint\limits_{S_a(M_0)}u(M)\mathrm{d}S.$$

证明 由 $\overline{B}_a(M_0)\subset\Omega$ 可知, $u\in C^2(B_a(M_0))\cap C^1(\overline{B}_a(M_0))$. 并由 u 在区域 Ω 内是调和函数可知，在 $B_a(M_0)$ 上有 $\Delta u=0$, 从而由基本积分公式可得

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_a(M_0)}\left[\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u(M)}{\partial \boldsymbol{n}}-u(M)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)\right]\mathrm{d}S,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 $S_a(M_0)$ 的外法线方向.

另一方面，对 $\forall\, M\in S_a(M_0)$, 由 $S_a(M_0)$ 的外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 与 $\overrightarrow{MM_0}$ 的方向一致可得

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)\Big|_{M\in S_a(M_0)}=\frac{\partial}{r_{MM_0}}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)\Big|_{M\in S_a(M_0)}=-\frac{1}{a^2},$$

并由定理 4.4.1 可得

$$\iint\limits_{S_a(M_0)} \frac{1}{r_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S = \frac{1}{a} \iint\limits_{S_a(M_0)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S = 0,$$

从而

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S_a(M_0)} u(M) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) \mathrm{d}S = \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_{S_a(M_0)} u(M) \mathrm{d}S.$$

定理 4.4.3 (极值原理)

设函数 u 在区域 Ω 内是调和函数，则除 u 恒等于常数外， u 不可能在 Ω 内部取到上确界和下确界的值.

证明 我们只证明上确界情形，下确界情形类似可证.

如果 $\sup\limits_{M\in\Omega} u(M) = -\infty$ 或 $\sup\limits_{M\in\Omega} u(M) = +\infty$, 则 u 在区域 Ω 内部取不到上确界值，故不妨设 $-\infty < \sup\limits_{M\in\Omega} u(M) < +\infty$, 且存在 $M_0 \in \Omega$, 使得

$$\sup_{M\in\Omega} u(M) = u(M_0).$$

首先证明：对 $\delta > 0$, 当 $\overline{B}_\delta(M_0) \subset \Omega$ 时，对 $\forall\, M \in \overline{B}_\delta(M_0)$, 有 $u(M_0) = u(M)$, 即 u 在闭球 $\overline{B}_\delta(M_0)$ 上恒等于常数 $u(M_0)$.

事实上，如果存在 $M^* \in \overline{B}_\delta(M_0)$, 使得 $u(M^*) < u(M_0)$, 则由 u 在点 M^* 连续可知，存在 $\eta > 0$, 使得

$$u(M^*) \leqslant \max_{M\in\overline{B}\eta(M^*)} u(M) < u(M_0).$$

另一方面，以 M_0 为心、 $r = r_{M^*M_0}$ 为半径的球 $B_r(M_0)$ 全含在 $\overline{B}_\delta(M_0)$ 内，故 u 在区域 Ω 内是调和函数，并根据平均值定理可得

$$\begin{aligned}
u(M_0) &= \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{S_r(M_0)} u(M)\mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{4\pi r^2} \left[\iint\limits_{S_r(M_0)\setminus S\eta(M^*)} u(M)\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_r(M_0)\cap S\eta(M^*)} u(M)\mathrm{d}S \right] \\
&< \frac{1}{4\pi r^2} \left[u(M_0) \iint\limits_{S_r(M_0)\setminus S\eta(M^*)} \mathrm{d}S + u(M_0) \iint\limits_{S_r(M_0)\cap S\eta(M^*)} \mathrm{d}S \right] \\
&< u(M_0) \left[\frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{S_r(M_0)} \mathrm{d}S \right] = u(M_0),
\end{aligned}$$

上式矛盾. 此矛盾说明，对 $\forall\, M \in \overline{B}_\delta(M_0)$, 有 $u(M) = u(M_0)$.

下面证明：对 $\forall\, M \in \Omega$, 有 $u(M_0) = u(M)$, 即 u 在 Ω 上恒等于常数 $u(M_0)$.

事实上，对 $\forall M* \in \Omega$，在 Ω 内可作一条连接 M_0 及 M^* 的折线 L. 使得 L 全含在 Ω 内，并用 d 表示 L 与 $\partial\Omega$ 的最短距离，即

$$d = \inf_{M\in L,\ M'\in\partial\Omega} |\overrightarrow{MM'}| = \inf_{M\in L,\ M'\in\partial\Omega} r_{MM'}.$$

由 L 是有界闭集可知，存在满足条件 $0 < \varepsilon < d$ 的 ε. 并在 L 上依次选取 $n+1$ 个不同的点 $M_0, M_1, \cdots, M_{n-1}, M_n = M^*$，使得

$$|\overrightarrow{M_kM_{k-1}}| = r_{M_kM_{k-1}} < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

于是

$$M_{k-1} \in B_\varepsilon(M_k) \subset \Omega, \quad k = 1, 2, \cdots n.$$

由前面已证得的结论可知，在 $B_\varepsilon(M_0)$ 内 $u \equiv u(M_0)$. 故由 $M_1 \in B_\varepsilon(M_0)$ 可得

$$u(M_1) = u(M_0),$$

于是在 $B_\varepsilon(M_1)$ 内 $u \equiv u(M_0)$. 利用数学归纳法可知，在 $B_\varepsilon(M_{n-1})$ 内 $u \equiv u(M_0)$. 故由 $M_n \in B_\varepsilon(M_{n-1})$ 可得

$$u(M^*) = u(M_n) = u(M_0).$$

由 M^* 的任意性可知，在 Ω 内 $u \equiv u(M_0)$.

综上可知，除 u 恒等于常数外，u 在 Ω 内部取不到上确界和下确界的值. ▌

推论 4.4.2 设函数 u 在有界区域 Ω 内是调和函数，在 $\overline{\Omega}$ 上连续，则有

$$\max_{M\in\overline{\Omega}} u(M) = \max_{M\in\partial\Omega} u(M), \quad \min_{M\in\overline{\Omega}} u(M) = \min_{M\in\partial\Omega} u(M).$$

推论 4.4.3 设函数 u 及 v 在有界区域 Ω 内都是调和函数，在 $\overline{\Omega}$ 上都连续，并且在 $\partial\Omega$ 上 $u \leqslant v$. 则除在 Ω 上 $u \equiv v$ 情况外，在 Ω 的内部恒有 $u < v$.

下面我们讨论强极值原理，为了叙述方便及证明需要，给出如下的定义.

定义 4.4.1 设 Γ 为区域 Ω 的边界，点 $P \in \Gamma$. 如果存在一个开球 B，使得 $B \subset \Omega$，且 $\overline{B} \cap \Gamma = \{P\}$，则称区域 Ω 在点 P 处满足内球条件；如果存在一个开球 B，使得 $B \subset \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}$，且 $\overline{B} \cap \Gamma = \{P\}$，则称区域 Ω 在点 P 处满足外球条件.

定理 4.4.4 (强极值原理)

设 Γ 为区域 Ω 的边界，函数 u 在区域 Ω 内是调和函数，在 $\overline{\Omega}$ 上连续，且不恒为常数. 如果 u 在点 $P_0 \in \Gamma$ 处取最大 (或最小) 值，区域 Ω 在 P_0 处满足内球条件，且边界曲面 Γ 在点 P_0 处有切平面，则当 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{P_0}$ 存在时，必有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{P_0} > 0 \quad \left(\text{或 } \left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{P_0} < 0\right).$$

其中 n 为区域 Ω 关于边界 Γ 的外法线方向.

证明 只证明最大值的情形，最小值情形类似可证.

由区域 Ω 在 P_0 处满足内球条件可知，存在 $R>0$, 使得 $B_R(P_0)$ 在点 P_0 与 Γ 相切 (图 4.4.1), 且

$$\overline{B}_R(P_0)\cap\Gamma=\{P_0\},\quad \overline{B}_R(P_0)\subset\Omega\cup\{P_0\}.$$

记 $D=B_R(P_0)\cap B_{\frac{R}{2}}(P_0)$ (图 4.4.1 中阴影部分), $S_D=\overline{B}_R(P_0)\cap\partial B_{\frac{R}{2}}(P_0)$.

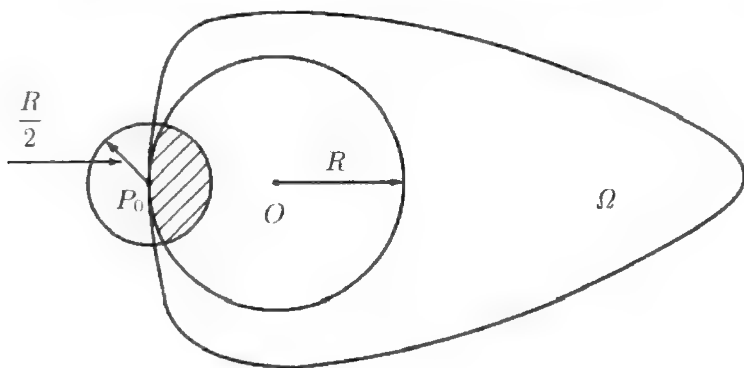


图 4.4.1

对 $\forall M\in\Omega$, 记 $r=r_{MO}$, 选取常数 $\alpha>\dfrac{6}{R^2}$, 作函数

$$w(M)=\mathrm{e}^{-\alpha r^2}-\mathrm{e}^{-\alpha R^2},$$

则当 $M\in\Omega$ 时，有

$$w(M)=\mathrm{e}^{-\alpha r^2}-\mathrm{e}^{-\alpha R^2}\begin{cases}>0, & \dfrac{R}{2}\leqslant r<R,\\ =0, & r=R,\\ <0, & r>R;\end{cases}$$

当 $M\in D$ 时，由 $r\geqslant\dfrac{R}{2}$ 可得

$$\Delta w=(-6\alpha+4\alpha^2r^2)\mathrm{e}^{-\alpha r^2}\geqslant\alpha R^2\left(\alpha-\frac{6}{R^2}\right)\mathrm{e}^{-\alpha r^2}>0.$$

另一方面，由 u 不恒为常数，并根据极值原理可知，u 在有界闭集 $S_R\subset\Omega$ 上取不到最大值 $u(P_0)$, 故对 $\forall M\in S_R$, 有

$$u(M)\leqslant\max_{M\in S_R}u(M)<u(P_0),$$

从而由 $w(M)$ 在 S_R 上连续可知，存在 $\varepsilon>0$, 使得

$$\max_{M\in S_R}u(M)+\varepsilon\max_{M\in S_R}w(M)<u(P_0).$$

对上述取定的 ε, 作函数

$$v(M)=u(M)+\varepsilon w(M),\quad M\in\Omega.$$

则当 $M\in D$ 时，由

$$\Delta v(M)=\Delta u(M)+\varepsilon\Delta w(M)=\varepsilon\Delta w(M)>0$$

可知，$v(M)$ 在 $\overline{D}$ 上的最大值不能在 D 的内点取到 (否则，在该点应有 $\Delta v\leqslant 0$, 矛盾), 即 $v(M)$ 只能在 ∂D 上取到，从而由

$$v(M)\big|_{M\in\partial D}=\begin{cases}u(M)+\varepsilon w(M)<u(P_0), & M\in S_R,\\ u(M)\leqslant u(P_0), & M\in\partial D\backslash S_R\ (\text{此时}\ r_{MO}=R)\end{cases}$$

可知，$v(M)$ 在 ∂D 上的最大值也在点 P_0 处取得，并且当 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{P_0}$ 存在时，有

$$\left.\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{P_0}=\left[\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}+\varepsilon\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\bigg|_{P_0}\geqslant 0.$$

综上可知，如果区域 Ω 及函数 $u(M)$ 满足定理条件，则当 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{P_0}$ 存在时，由区域 Ω 关于边界 Γ 的外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 与 $\overrightarrow{P_0O}$ 相同可得

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{P_0}\geqslant-\varepsilon\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{P_0}=2\varepsilon r\alpha e^{-\alpha r^2}\big|_{P_0}=2\varepsilon R\alpha e^{-\alpha R^2}\big|_{P_0}>0.$$ ∎

4.4.2 解的唯一性及稳定性

首先用极值原理证明 Dirichlet 问题解的唯一性及稳定性.

定理 4.4.5 三维 Laplace 方程的 Dirichlet 内问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, & (x,y,z)\in\Omega,\\ u(x,y,z)|_{\partial\Omega}=g(x,y,z)\end{cases}$$

的解如果存在，则必是唯一的，且连续依赖于所给的边值 g.

证明 设 u_1 与 u_2 都是所给 Dirichlet 内问题的解，令

$$u(x,y,z)=u_1(x,y,z)-u_2(x,y,z),\quad (x,y,z)\in\Omega,$$

则 u 是 Dirichlet 内问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, & (x,y,z)\in\Omega,\\ u(x,y,z)|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

的解，故 $u(x,y,z)$ 在 Ω 内是调和函数，在 $\overline{\Omega}$ 上连续，在边界 $\partial\Omega$ 上 $u=0$. 从而由

推论 4.4.2 及边界条件可知，对 $\forall\,(x,y,z)\in\Omega$, 有

$$0=\min_{\partial\Omega}u(x,y,z)\leqslant u(x,y,z)\leqslant\max_{\partial\Omega}u(x,y,z)=0,$$

即在 $\overline{\Omega}$ 上有 $u_1\equiv u_2$. 解的唯一性得证.

下面证明 Dirichlet 内问题的解连续依赖于所给的边值 g.

设 $u_i\ (i=1,2)$ 是 Dirichlet 内问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}=0, & (x,y,z)\in\Omega,\\ u(x,y,z)|_{\partial\Omega}=g_i(x,y,z) & (i=1,2)\end{cases}$$

的解，则 u_1-u_2 在 Ω 内是调和函数，在 $\overline{\Omega}$ 上连续，且

$$[u_1(x,y,z)-u_1(x,y,z)]\big|_{\partial\Omega}=g_1(x,y,z)-g_2(x,y,z).$$

由此可知，对 $\forall\,\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 当 $\max\limits_{\partial\Omega}|g_1(x,y,z)-g_2(x,y,z)|<\delta$ 时，有

$$-\varepsilon=\delta<\min_{\partial\Omega}(g_1-g_2)\leqslant\max_{\partial\Omega}(g_1-g_2)<\delta=\varepsilon,$$

从而由推论 4.4.3 可知，对 $\forall\,(x,y,z)\in\overline{\Omega}$, 有

$$-\varepsilon<u_1(x,y,z)-u_2(x,y,z)<\varepsilon,$$

即

$$\max_{\overline{\Omega}}|u_1-u_2|<\varepsilon.$$

这说明所给 Dirichlet 内问题的解在最大模意义下连续依赖于边界条件. ▌

定理 4.4.6 三维 Laplace 方程的 Dirichlet 外问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}=0, & (x,y,z)\in\Omega',\\ u(x,y,z)\big|_{\partial\Omega'}=g(x,y,z),\\ \lim\limits_{r\to+\infty}u(x,y,z)=0, & r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\end{cases}$$

的解如果存在，则必是唯一的，且连续依赖于所给的边值 g.

证明 设 u_1 与 u_2 都是所给 Dirichlet 外问题的解，令

$$u(x,y,z)=u_1(x,y,z)-u_2(x,y,z),\quad (x,y,z)\in\Omega',$$

则 u 满足 Dirichlet 外问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}=0, & (x,y,z)\in\Omega',\\ u(x,y,z)\big|_{\partial\Omega'}=0,\\ \lim\limits_{r\to+\infty}u(x,y,z)=0, & r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\end{cases}$$

下面证明在 $\overline{\Omega'}$ 上 $u \equiv 0$.

事实上，如果存在 $(x_0, y_0) \in \Omega'$，使得 $u(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. 选取 $\varepsilon = \dfrac{|U(x_0, y_0, z_0)|}{2}$. 则由 $\lim\limits_{r \to +\infty} u(x, y, z) = 0$ 可知，存在 $R > 0$，使得点 (x_0, y_0, z_0) 和边界 $\partial\Omega'$ 全含在开球 $B_R = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < R\}$ 内，且当 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geqslant R$ 时，有

$$|u(x, y, z)| = |u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)| < \varepsilon,$$

并由 $u\big|_{\partial\Omega'} = 0$ 可知，对 $\forall\,(x, y, z) \in \partial(B_R \cap \Omega')$，有

$$-\varepsilon < u(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z) < \varepsilon,$$

故由 u 在 Ω' 内是调和函数，并根据推论 4.4.3 可知，对 $\forall\,(x, y, z) \in B_R \cap \Omega'$，有

$$-\varepsilon < u(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z) < \varepsilon.$$

从而由 $(x_0, y_0, z_0) \in B_R \cap \Omega'$ 可得

$$|u(x_0, y_0, z_0)| < \varepsilon = \frac{|u(x_0, y_0, z_0)|}{2}.$$

这与 $u(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ 矛盾，此矛盾说明对 $\forall\,(x, y, z) \in \Omega'$，有

$$|u(x, y, z)| = |u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)| = 0.$$

即在 $\overline{\Omega'}$ 上 $u_1 \equiv u_2$. 唯一性得证.

下面证明 Dirichlet 外问题的解连续依赖于所给的边值 g.

设 u_i $(i = 1, 2)$ 是 Dirichlet 外问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega', \\ u(x, y, z)|_{\partial\Omega'} = g_i(x, y, z), \\ \lim\limits_{r \to +\infty} u(x, y, z) = 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases}$$

的解，则 $u_1 - u_2$ 在 Ω' 内是调和函数，在 $\overline{\Omega'}$ 上连续，且

$$[u_1(x, y, z) - u_1(x, y, z)]\big|_{\partial\Omega'} = g_1(x, y, z) - g_2(x, y, z).$$

由此可知，对 $\forall\,\varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon$. 当 $\max\limits_{\partial\Omega'} |g_1(x, y, z) - g_2(x, y, z)| < \delta$ 时，有

$$-\varepsilon = \delta < \min_{\partial\Omega'}(g_1 - g_2) \leqslant \max_{\partial\Omega'}(g_1 - g_2) < \delta = \varepsilon,$$

从而由

$$\lim_{r \to +\infty} [u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)] = 0,$$

并仿照唯一性的证明过程可推知，对 $\forall\,(x, y, z) \in \Omega'$，有

$$-\varepsilon < u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z) < \varepsilon,$$

即

$$\max_{\Omega'}|u_1(x,y,z)-u_2(x,y,z)|<\varepsilon.$$

这说明所给 Dirichlet 外问题的解在最大模意义下连续依赖于边界条件. ▌

定理 4.4.7 设 $u_i\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ $(i=1,2)$ 是三维 Laplace 方程的 Neumann 内问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, & (x,y,z)\in\Omega,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\partial\Omega}=g(x,y,z)\end{cases}$$

的两个解, 则它们之间最多相差一个常数, 其中 $\boldsymbol{n}$ 为区域 Ω 关于边界 $\partial\Omega$ 的外法线方向.

证明 令 $u=u_1-u_2$, 则 $u\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$, 且满足 Neumann 内问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, & (x,y,z)\in\Omega,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}$$

故取 $u=v$, 由 Green 第一公式可得

$$\iiint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

从而由 $u\in C^1(\overline{\Omega})$ 可知, 对 $\forall\,(x,y,z)\in\overline{\Omega}$, 有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

即在 $\overline{\Omega}$ 上 $u=u_1-u_2$ 恒等于常数. ▌

Neumann 内问题的任意两个解之间虽然相差一个常数, 但因为许多物理问题所需计算的量不是解 u 本身, 而是其导数. 例如, 计算静电场的电场强度, 要计算的是 $E=-\mathrm{grad}\,u$, 而不是电势 u, 因此 Neumann 内问题仍是有意义的.

定理 4.4.8 三维 Laplace 方程 Neumann 外问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, & (x,y,z)\in\Omega',\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}'}\right|_{\Gamma}=g(x,y,z),\\ \lim\limits_{r\to+\infty}u(x,y,z)=0, & r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\end{cases}$$

的解如果存在, 则必是唯一的, 其中 Γ 为有界区域 Ω 的边界, 在 Γ 上每一点处都有切平面且满足外球条件, Ω' 是以 Γ 为边界的外部区域, $\boldsymbol{n}'$ 为区域 Ω' 关于边界 Γ 的外法线方向.

证明 设 u_1 与 u_2 都是所给 Neumann 外问题的解，令

$$u(x,y,z)=u_1(x,y,z)-u_2(x,y,z),\quad (x,y,z)\in\Omega'.$$

则 u 满足 Neumann 外问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, & (x,y,z)\in\Omega',\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}'}\right|_{\Gamma}=0, & \\ \lim\limits_{r\to+\infty}u(x,y,z)=0, & r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\end{cases}$$

故对 $\forall\, R>0$, 当 Γ 全含在开球 $B_R=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2<R^2\}$ 内时，由 Γ 上每一点处都有切平面且满足外球条件可知，区域 $B_R\cap\Omega'$ 在边界上每一点处都有切平面且满足内球条件，从而由 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}'}\right|_{\Gamma}=0$, 并根据强极值原理可知，$u$ 在 $B_R\cap\Omega'$ 上的最大值和最小值只能在圆周 $\partial B_R=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=R^2\}$ 上取到，即

$$\min_{B_R\cap\Omega'}u(x,y,z)=\min_{\partial B_R}u(x,y,z),\quad \max_{B_R\cap\Omega'}u(x,y,z)=\max_{\partial B_R}u(x,y,z).$$

另一方面，如果存在 $(x_0,y_0)\in\Omega'$, 使得 $u(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, 取 $\varepsilon=\dfrac{|U(x_0,y_0,z_0)|}{2}$, 则由 $\lim\limits_{r\to+\infty}u(x,y,z)=0$ 可知，存在 $R>0$, 使得点 (x_0,y_0,z_0) 和 Γ 全含在开球 B_R 内，且当 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}\geqslant R$ 时，有

$$|u(x,y,z)|=|u_1(x,y,z)-u_2(x,y,z)|<\varepsilon.$$

故对 $\forall\,(x,y,z)\in B_R\cap\Omega'$, 有

$$-\varepsilon<\min_{\partial B_R}u(x,y,z)\leqslant u(x,y,z)\leqslant\max_{\partial B_R}u(x,y,z)<\varepsilon,$$

从而由 $(x_0,y_0,z_0)\in B_R\cap\Omega'$ 可得

$$|u(x_0,y_0,z_0)|<\varepsilon=\frac{|U(x_0,y_0,z_0)|}{2}.$$

这与 $u(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ 矛盾，此矛盾说明对 $\forall\,(x,y,z)\in\Omega'$, 有

$$|u(x,y,z)|=|u_1(x,y,z)-u_2(x,y,z)|=0,$$

即在 $\overline{\Omega'}$ 上 $u_1\equiv u_2$. ▮

4.4.3* 调和函数的一些重要性质

定理 4.4.9 (Harnack 第一定理)

设函数序列 $\{u_n\}$ 中的每个函数在有界区域 Ω 内都是调和函数，在 $\overline{\Omega}$ 上连续，而且 $\{u_n\}$ 在 $\partial\Omega$ 上一致收敛，则 $\{u_n\}$ 在 Ω 内也一致收敛，并且极限函数 u 在 Ω 内也是调和函数.

证明 设 $g_n(x,y,z)=u_n(x,y,z)\big|_{\partial\Omega}$, 则由连续函数序列 $\{g_n\}$ 在 $\partial\Omega$ 上一致收敛可知, 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在正整数 $N(\varepsilon)$, 使得当 $n,\ m>N$ 时, 对 $\forall\,(x,y,z)\in\partial\Omega$, 有

$$|g_n(x,y,z)-g_m(x,y,z)|<\varepsilon,$$

即

$$\varepsilon<g_n(x,y,z)-g_m(x,y,z)<\varepsilon,$$

故由推论 4.4.3 可知, 当 $n,\ m>N$ 时, 对 $\forall\,(x,y,z)\in\overline{\Omega}$, 有

$$\varepsilon<u_n(x,y,z)-u_m(x,y,z)<\varepsilon,$$

即

$$\max_{\overline{\Omega}}|u_n(x,y,z)-u_m(,x,y,z)|<\varepsilon,$$

从而由 Cauchy 判别法知, 函数序列 $\{u_n\}$ 在 $\overline{\Omega}$ 内一致收敛, 而且极限函数

$$u(x,y,z)=\lim_{n\to+\infty}u_n(x,y,z),\quad (x,y,z)\in\overline{\Omega}$$

在 $\overline{\Omega}$ 内连续.

下证极限函数 $u(x,y,z)$ 在 Ω 内是调和函数.

对 $\forall\,(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$, 由 Ω 为开集可知, 存在 $R>0$, 使得 $(x_0,y_0,z_0)\in\overline{B}_R\subset\Omega$, 故由 $u_n\ (n=1,2,\cdots)$ 在 $\overline{B}_R$ 上是调和函数, 并根据 Poisson 公式可得

$$u_n(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)=\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{(R^2-\rho_0^2)u_n(R,\theta,\varphi)}{(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta,$$

从而由 $\{u_n\}$ 在 $\overline{B}_R$ 上一致收敛可知, 当 $n\to\infty$ 时, 在上式两端取极限可得

$$u(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)=\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{(R^2-\rho_0^2)u(R,\theta,\varphi)}{(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta,$$

其中 $(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)\in B_R$ 是对应点 (x_0,y_0,z_0) 的球坐标, $(R,\theta,\varphi)\in\partial B_R$, 且

$$\cos\gamma=\cos\varphi\cos\varphi_0+\sin\varphi\sin\varphi_0\cos(\theta-\theta_0).$$

综上可知, 极限函数 u 可用球的 Poisson 公式表达, 故 u 在球 B_R 内是调和函数, 从而由点 (x_0,y_0,z_0) 的任意性可知, u 在 Ω 内是调和函数. ▌

定理 4.4.10 (Harnack 不等式)

设 u 在球 $B_R(M^*)$ 内是非负的调和函数, 则对 $\forall\,P\in B_R(M^*)$, 有

$$\frac{R(R-r)}{(R+r)^2}u(M^*)\leqslant u(P)\leqslant\frac{R(R+r)}{(R-r)^2}u(M^*),$$

其中 $r=r_{PM^*}$.

证明 对 $\forall\,P\in B_R(M^*)$, 任意选取满足条件 $r_{PM^*}<\eta<R$ 的 η, 则由题设可

知, u 在球 $\overline{B_\eta(M^*)}$ 内是调和函数, 从而由 Poisson 公式可得

$$u(P)=\frac{1}{4\pi\eta}\iint\limits_{\partial B_\eta(M_0)}\frac{\eta^2-\rho_0^2}{(\eta^2+\rho_0^2-2\eta\rho_0\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}u(M)\mathrm{d}S.$$

其中 $P(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)\in B_\eta(M^*)$, $M(\eta,\theta,\varphi)\in\partial B_R(M^*)$, 且

$$\cos\gamma=\cos\varphi\cos\varphi_0+\sin\varphi\sin\varphi_0\cos(\theta-\theta_0).$$

另一方面, 由 u 在 $B_R(M^*)$ 内是非负连续函数可知, 当 $M\in\partial B_\eta(M^*)$ 时, 有

$$\frac{\eta^2-\rho_0^2}{(\eta+\rho_0)^3}u(M)\leqslant\frac{\eta^2-\rho_0^2}{(\eta^2+\rho_0^2-2\eta\rho_0\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}u(M)\leqslant\frac{\eta^2-\rho_0^2}{(\eta-\rho_0)^3}u(M).$$

从而由 u 在球 $\overline{B_\eta(M^*)}$ 内是调和函数, 并将上式在 $\partial B_\eta(M^*)$ 积分, 得

$$\frac{\eta-\rho_0}{(\eta+\rho_0)^2}\iint\limits_{\partial B_\eta(M^*)}u(M)\mathrm{d}S\leqslant 4\pi\eta\, u(P)\leqslant\frac{\eta+\rho_0}{(\eta-\rho_0)^2}\iint\limits_{\partial B_\eta(M^*)}u(M)\mathrm{d}S.$$

将上式两端除以 $4\pi\eta$, 并由平均值定理可得

$$\frac{\eta(\eta-\rho_0)}{(\eta+\rho_0)^2}u(M^*)\leqslant u(P)\leqslant\frac{\eta(\eta+\rho_0)}{(\eta-\rho_0)^2}u(M^*),$$

于是由 η 的任意性, 在上式中令 $\eta\to R^+$, 并由 $\rho_0=r_{PM^*}=r$ 可得

$$\frac{R(R-r)}{(R+r)^2}u(M^*)\leqslant u(P)\leqslant\frac{R(R+r)}{(R-r)^2}u(M^*).$$

▌

定理 4.4.11 (Harnack 单调收敛定理)

设函数序列 $\{u_n\}$ 中的每个函数在区域 Ω 内都是调和函数, 且在 Ω 内单调增加, 即对 $\forall\, P\in\Omega$, 数列 $\{u_n(P)\}$ 单调增加, 则下列结论之一成立:

(1) 函数序列 $\{u_n\}$ 在 Ω 内的每一点都收敛, 且在 Ω 内的任何紧集 F 上都一致收敛, 而极限函数 u 在 Ω 内是调和函数;

(2) 函数序列 $\{u_n\}$ 在 Ω 内的每一点处都发散, 且对 $\forall\, P\in\Omega$, 有

$$\lim_{n\to\infty}u_n(P)=+\infty.$$

证明 (1) 设 $M^*\in\Omega$, 数列 $\{u_n(M^*)\}$ 收敛, M^* 到 $\partial\Omega$ 的距离为 R. 则

$$R=\inf_{P\in\partial\Omega}|P-M^*|>0.$$

首先证明: 函数序列 $\{u_n\}$ 在区域 Ω 内的任何闭球上一致收敛.

事实上, 对 $\forall\,\varepsilon>0$ 及任意满足条件 $0<\eta<R$ 的 η, 由数列 $\{u_n(M^*)\}$ 单调增加且收敛可知, 存在 $N>0$, 使得当 $n>m>N$ 时, 有

$$0\leqslant u_n(M^*)-u_m(M^*)<\frac{(R-\eta)^2}{2R^2}\varepsilon.$$

并由 $u_n - u_m$ 在 Ω 内是调和函数及 Harnack 不等式可知，对 $\forall P \in \overline{B_\eta(M^*)}$, 有

$$u_n(P) - u_m(P) \leqslant \frac{R(R + r_{M^*P})}{(R - r_{M^*P})^2}[u_n(M^*) - u_m(M^*)]$$
$$\leqslant \frac{R(R+R)}{(R-\eta)^2}[u_n(M^*) - u_m(M^*)],$$

故当 $n > M > N$ 时，有

$$\max_{P \in \overline{B_\eta(M^*)}} |u_n(P) - u_m(P)| < \varepsilon,$$

从而由 η 的任意性可知， $\{u_n\}$ 在 $B_R(M^*)$ 内是内闭一致收敛的.

综上可知，$\{u_n\}$ 收敛的点全体所成的点集是含在 Ω 内的一个开集，故由 $\{u_n\}$ 在 $B_R(M^*)$ 内内闭一致收敛，并根据 Ω 的连通性可知， $\{u_n\}$ 在 Ω 内的每一点处都收敛，并且在 Ω 内的任何闭球上一致收敛.

其次证明：对 Ω 的任何紧子集 F, 函数序列 $\{u_n\}$ 在 F 上都一致收敛.

事实上，对 Ω 的任何紧子集 F, 由 Heine–Borel 有限覆盖定理及 $\{u_n\}$ 在 Ω 内的任何闭球上一致收敛可知，存在有限个开球 $B_1, B_2, \cdots, B_k$, 使得

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{k} \subset \Omega,$$

并且 $\{u_n\}$ 在 $\overline{B_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ 上一致收敛，从而 $\{u_n\}$ 在紧集 F 上一致收敛.

最后证明：函数序列 $\{u_n\}$ 的极限函数 u 在 Ω 上是调和函数.

事实上，对 $\forall M^* \in \Omega$, 存在 $R > 0$, 使得 $\overline{B_R(M^*)} \subset \Omega$, 故由 $\overline{B_R(M^*)}$ 为紧集可知，函数序列 $\{u_n\}$ 在 $\overline{B_R(M^*)}$ 上一致收敛，从而由 Harnack 第一定理可知，极限函数 u 在 $B_R(M^*)$ 内是调和的. 由 M^* 的任意性可知，极限函数 u 在 Ω 内是调和函数.

(2) 设 $M_0 \in \Omega$, 数列 $\{u_n(M_0)\}$ 发散，则由 (1) 可知， $\{u_n\}$ 在 Ω 内的每一点处都发散，并由 $\{u_n\}$ 在 Ω 内单调增加可知，对 $\forall P \in \Omega$, 有

$$\lim_{n\to\infty} u_n(P) = +\infty.$$ ▌

定理 4.4.12 (奇点可去性定理)

设 $u(M)$ 在点 $P \in \mathbb{R}^3$ 的某一邻域内除点 P 外是调和函数，且

$$\lim_{M\to P} r_{MP}\, u(M) = 0,$$

则可以补充定义 u 在点 P 的值，使得 $u(M)$ 在该邻域内是调和函数.

证明 由 $u(M)$ 在点 P 的某一邻域内除点 P 外是调和函数可知，存在 $R > 0$, 使得 $u(M)$ 在 $B_R(P)$ 上除点 P 外是调和函数，在球面 $\partial B_R(P)$ 上连续，从而由定

理 4.3.2 可知，存在函数 $v(M)$, 使得 $v(M)$ 满足 Dirichlet 内问题

$$\begin{cases} \Delta v(M) = 0,\ M \in B_R(P), \\ v\big|_{\partial B_R(P)} = u\big|_{\partial B_R(P)}, \end{cases}$$

并且函数 $u(M) - v(M)$ 在 $B_R(P)$ 内除点 P 外是调和函数，在 $\partial B_R(P)$ 上连续.

令 $u(P) = v(P)$. 只需证明：对 $\forall\, M \in B_R(P)\backslash\{P\}$, 有 $u(M) = v(M)$.

事实上，由 $v(M)$ 在 $B_R(P)$ 内是调和函数及

$$\lim_{M\to P} r_{MP}\, u(M) = 0$$

可得

$$\lim_{M\to P} \frac{Rr_{MP}}{R - r_{MP}}\,[u(M) - v(M)] = 0,$$

故对 $\forall\, M^* \in B_R(P)\backslash\{P\}$ 及对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $\delta \in (0, r_{M^*P})$, 使得当 $r_{MP} \leqslant \delta$ 时，有

$$\left|\frac{Rr_{MP}}{R - r_{MP}}\,[u(M) - v(M)]\right| < \varepsilon.$$

从而对 $\forall\, M \in \partial B_\delta(P)$, 有

$$-\varepsilon\Big(\frac{1}{r_{MP}} - \frac{1}{R}\Big) < u(M) - v(M) < \varepsilon\Big(\frac{1}{r_{MP}} - \frac{1}{R}\Big).$$

另一方面，由 $\varepsilon\Big(\dfrac{1}{r_{MP}} - \dfrac{1}{R}\Big)$ 在 $\Omega_\delta = \{M \mid \delta < r_{MP} < R\}$ 内都是调和函数，在 $\overline{\Omega_\delta}$ 上都连续，且 $(v - u)\big|_{\partial B_R(P)} = 0$. 并根据推论 4.4.3 可知，对 $\forall\, M^* \in \Omega_\delta$, 有

$$|u(M^*) - v(M^*)| < \varepsilon\Big(\frac{1}{r_{M^*P}} - \frac{1}{R}\Big).$$

综上可知，对 $\forall\, M^* \in B_R(P)\backslash\{P\}$ 及 $\forall\, \varepsilon > 0$, 有

$$|u(M^*) - v(M^*)| < \varepsilon\Big(\frac{1}{r_{M^*P}} - \frac{1}{R}\Big).$$

在上式中，令 $\varepsilon \to 0$，得

$$u(M^*) = v(M^*),$$

从而由 M^* 的任意性可知，对 $\forall\, M \in B_R(P)\backslash\{P\}$, 有

$$u(M) = v(M).$$

∎

定理 4.4.13 (调和函数的解析性定理)

设 $u(M)$ 在区域 Ω 内是调和函数，则 $u(M)$ 在区域 Ω 内关于变量 M 是解析函数，即对 $\forall\, M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, 存在 $R > 0$, 使得在球 $B_R(M_0)$ 内 $u(M)$ 都可以展开成 $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ 的幂级数.

证明　对 $\forall\, M_0 \in \Omega$, 由 Ω 为开集可知，存在 $R > 0$, 使得 $\overline{B_R(M_0)} \subset \Omega$, 从而由

$u(M)$ 在 $\overline{B_R(M_0)}$ 上是调和函数，并根据 Poisson 公式可知，对 $\forall\, M \in B_R(M_0)$，有

$$\begin{aligned} u(M) &= \frac{1}{4\pi R}\iint\limits_{B_R(M_0)} \frac{R^2-\rho^2_{MM_0}}{(R^2+\rho^2_{MM_0}-2R\rho_{MM_0}\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}u(P)\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{4\pi R}\iint\limits_{B_R(M_0)} \frac{R^2-\rho^2_{MM_0}}{\rho^3_{MP}}u(P)\mathrm{d}S, \end{aligned}$$

其中点 $M(x,y,z)\in B_R(M_0)$ 的球坐标为 $(\rho_{MM_0},\theta_M,\varphi_M)$，点 $P(\xi,\eta,\zeta)\in\partial B_R(M_0)$ 的球坐标为 (R,θ,φ)，且

$$\cos\gamma=\cos\varphi_M\cos\varphi+\sin\varphi_M\sin\varphi\cos(\theta-\theta_M).$$

为了讨论方便，设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为坐标原点，则对 $\forall\, P(\xi,\eta,\zeta)\in\partial B_R(M_0)$，有

$$R^2=(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2+(\zeta-z_0)^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2,$$

对 $\forall\, M(x,y,z)\in B_R(M_0)$，有

$$\rho^2_{MM_0}=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=x^2+y^2+z^2,$$

$$\rho^2_{PM}=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2,$$

从而

$$\begin{aligned} \frac{R^2-\rho^2_{MM_0}}{\rho^3_{PM}} &= \frac{R^2-(x^2+y^2+z^2)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{R^2-(x^2+y^2+z^2)}{R^3}\left[1-\frac{2(x\xi+y\eta+z\zeta)-(x^2+y^2+z^2)}{R^2}\right]^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

利用二项式定理，把上式右端项展开为关于 x, y, z 的幂级数，而当点 (ξ,η,ζ) 在球面上，且 $|x|$, $|y|$, $|z|$ 充分小时，这个幂级数是一致收敛的，故它可以逐项求积分，且积分后仍得到一个关于 x, y, z 的一致收敛的幂级数，从而函数 $u(M)$ 在点 M_0 处解析．由点 M_0 的任意性可知， $u(M)$ 在 Ω 内处处解析． ▮

习题 4.4

4.4.1 在二维情况下，证明调和函数的平均值定理和极值原理．

4.4.2 证明三维 Laplace 方程 Dirichlet 外问题解的稳定性．

4.4.3 证明 Green 函数的性质 4.3.2.

4.4.4 设有界区域 Ω 的边界 Γ 为充分光滑的闭曲面，证明： Poisson 方程的第三边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = f, \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial n}+\lambda u\right)\Big|_{\Gamma}=g \end{cases}$$

的解是唯一的，其中常数 $\lambda > 0$，$\boldsymbol{n}$ 为 Γ 的外法线方向.

4.4.5 设函数 u 在区域 Ω 内二阶连续可微，在闭区域 $\overline{\Omega}$ 上连续，并且满足

$$\Delta u = f > 0,$$

则 u 不可能在 Ω 内部取到上确界的值.

4.4.6 设 $u(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内除 (x_0,y_0) 外是调和函数，且

$$u(x,y) = O\Big(\ln\frac{1}{r}\Big) \quad \big(r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \to 0\big),$$

则可重新定义 $u(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的值，使得 $u(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的整个邻域内为调和函数.

4.4.7 证明：如果 $u(M)$ 在闭曲面 $\partial\Omega$ 的外部是调和函数，且

$$u(M) = O\Big(\frac{1}{r_{MO}}\Big) \quad (r_{MO}\to\infty),$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial r}\bigg|_{r=r_{MO}} = O\Big(\frac{1}{r_{MO}^2}\Big) \quad (r_{MO}\to\infty),$$

则对 $\partial\Omega$ 外的任意一点 M_0，有

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Gamma}\Big[\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\Big(\frac{1}{r_{MM_0}}\Big)\Big]\mathrm{d}S - \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{r_{MM_0}}\Delta u\mathrm{d}V.$$

4.4.8 如果三维调和函数 $u(M)$ 在奇点 M_0 的某邻域内能表示为 $\dfrac{N(M)}{r_{MM_0}^{\alpha}}$ 的形式，其中常数 $\alpha\in(0,1]$，且 $N(M)$ 是不为零的光滑函数，证明：在点 M_0 处函数 u 趋于无穷大的阶数必与 $\dfrac{1}{r_{MM_0}}$ 相同，即 $\alpha = 1$.

4.4.9* 设调和函数列 $\{u_k\}$ 在有界区域 Ω 内一致有界，证明：每一个函数 u_k 的一阶偏导数在 Ω 内内闭一致有界，且存在 $\{u_k\}$ 的一个子序列，使其在 Ω 内内闭一致收敛.

4.5* 一般区域上的 Dirichlet 问题

本节将介绍一般区域上的 Dirichlet 问题解的存在性的一个证明方法，此方法是德国数学家 Oscar Perron 在 1923 年给出的，简称 Perron 方法. 本节除特别说明外，假设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的有界区域， B 是 $\mathbb{R}^3$ 中的开球，并记 $\Gamma=\partial\Omega$，$S=\partial B$.

4.5.1 上、下调和函数与上、下函数的概念及基本性质

设函数 $V(M)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上连续，则对 $\forall\, B\subset\Omega$，可以定义一个连续函数

$$\begin{cases} V_B(M) = V(M), & M\in\overline{\Omega}\backslash B, \\ \Delta V_B(M) = 0, & M\in B, \end{cases}$$

即函数 $V_B(M)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上连续，在球 B 外部及边界 $S\cup\Gamma$ 上等于 $V(M)$，在球 B 内是调和函数.

定义 4.5.1 设 $V(M)$ 在区域 $\overline{\Omega}$ 上连续. 如果对 $\forall B \subset \Omega$, 有

$$V_B(M) \leqslant V(M) \quad (M \in \overline{\Omega}),$$

则称 $V(M)$ 为 Ω 上的上调和函数, 简称上调和函数; 如果对 $\forall B \subset \Omega$, 有

$$V_B(M) \geqslant V(M) \quad (M \in \overline{\Omega}),$$

则称 $V(M)$ 为 Ω 上的下调和函数, 简称下调和函数.

定义 4.5.2 设函数 $g(M)$ 在 Γ 上连续. 如果 Ω 上的上调和函数 $V(M)$ 均满足

$$V(M) \geqslant g(M) \quad (M \in \Gamma),$$

则称 $V(M)$ 是 $g(M)$ 的一个上函数; 如果 Ω 上的下调和函数 $V(M)$ 均满足

$$V(M) \leqslant g(M) \quad (M \in \Gamma),$$

则称 $V(M)$ 是 $g(M)$ 的一个下函数.

上调和函数与下调和函数具有如下一些性质.

性质 4.5.1 设函数 $V(M)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上连续, 在 Ω 内是调和函数, 则 $V(M)$ 既是上调和函数也是下调和函数.

性质 4.5.2 设 $V(M)$ 是上 (或下) 调和函数, 则 $-V(M)$ 是下 (或上) 调和函数.

性质 4.5.3 设 $V(M)$ 与 $W(M)$ 都是上 (或下) 调和函数, 则 $V(M)+W(M)$ 也是上 (或下) 调和函数.

性质 4.5.4 设 $V(M)$ 为 Ω 上的上 (或下) 调和函数, 则除 $V(M)$ 恒等于常数外, 它只能在边界 Γ 上取到最小值 (或最大值).

利用上调和函数与下调和函数的定义, 容易证明以上性质, 请读者自行完成.

性质 4.5.5 设 $V_1(M)$, $V_2(M)$, $\cdots$ $V_n(M)$ 都是上调和函数, 则函数

$$V(M) = \min\{V_1(M), V_2(M), \cdots, V_n(M)\}$$

也是上调和函数.

证明 由 $V_i(M) \in C(\overline{\Omega})$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 易知, $V(M) \in C(\overline{\Omega})$.
另一方面, 对 $\forall B \subset \Omega$, 由 $V_B(M)$、$V_{iB}(M)$ 定义可知, 对 $\forall M \in \overline{\Omega} \backslash B$, 有

$$V_B(M) = V(M) \leqslant V_i(M) = V_{iB}(M) \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

并对 $\forall\, M \in B$, 有

$$\Delta V_B(M) = \Delta V_{iB} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

故由 $S \subset \overline{\Omega}\backslash B$, 并根据极值原理可知，对 $\forall\, M \in B$, 有

$$V_B(M) \leqslant V_{iB}(M),$$

从而由 $V_1(M), V_2(M), \cdots V_n(M)$ 都是上调和函数可知，对 $\forall\, M \in B$, 有

$$V_B(M) \leqslant V_{iB}(M) \leqslant V_i(M) \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

综上可知， $V(M) \in C(\overline{\Omega})$, 且对 $\forall\, M \in \overline{\Omega}$, 有

$$V_B(M) \leqslant V(M),$$

即 $V(M)$ 为 Ω 上的上调和函数. ▮

性质 4.5.6 设 $V(M)$ 为 Ω 上的上调和函数，则 $V_B(M)$ 也是上调和函数.

证明 记 $W(M) = V_B(M)\ (M \in \overline{\Omega})$, 则对 $\forall\, B^* \subset \Omega$, 由 $W_{B^*}(M)$ 的定义可知，对 $\forall\, M \in \overline{\Omega}\backslash B^*$, 有

$$W_{B^*}(M) = W(M),$$

故只需证明对 $\forall\, M \in B^*$, 有

$$W_{B^*}(M) \leqslant W(M).$$

由于球 B 与球 B^* 在 Ω 内的相互位置有下列四种情况可能发生，故分别讨论.

第一种情形：球 B 与球 B^* 相交.

此时 $B^* = (B^*\backslash B) \cup (B \cap B^*)$, 且

$$S^* = [S^* \cap B] \cup [S^* \cap \overline{\Omega}\backslash B] \subset \overline{\Omega}\backslash B^*.$$

并由 $V(M)$ 是上调和函数及 $W(M) = V_B(M)$ 可知，在 S^* 上，有

$$\begin{cases} W_{B^*}(M) = W(M) = V_B(M) \leqslant V(M) = V_{B^*}(M), & M \in S^* \cap B, \\ W_{B^*}(M) = W(M) = V_B(M) = V(M) = V_{B^*}(M), & M \in S^* \cap \overline{\Omega}\backslash B, \end{cases}$$

故由 $W_{B^*}(M)$ 与 $V_{B^*}(M)$ 在 B^* 内是调和函数，并根据极值原理的推论 4.4.3 可知，对 $M \in \overline{B^*}$, 有

$$W_{B^*}(M) \leqslant V_{B^*}(M),$$

从而对 $\forall\, M \in B^*\backslash B$, 有

$$W_{B^*}(M) \leqslant V_{B^*}(M) \leqslant V(M) = V_B(M) = W(M).$$

另一方面，由于 $B^* \cap B$ 的边界可表示为

$$\partial(B^* \cap B) = [S^* \cap B] \cup [S \cap \overline{B^*}],$$

并且在 $\partial(B^* \cap B)$ 上，有

$$\begin{cases} W_{B^*}(M) \leqslant V_{B^*}(M) \leqslant V(M) = V_B(M) = W(M), & M \in S \cap \overline{B^*}, \\ W_{B^*}(M) = W(M) = V_B(M), & M \in S^* \cap B, \end{cases}$$

从而由 $W_{B^*}(M)$ 与 $V_B(M)$ 在 $B^* \cap B$ 内都是调和函数可知，对 $M \in B^* \cap B$, 有

$$W_{B^*}(M) \leqslant V_B(M) = W(M).$$

综上可知，对 $\forall\, M \in B^*$, 有

$$W_{B^*}(M) \leqslant W(M).$$

第二种情形：球 B^* 全含在球 B 内.

此时 $B^* = B \cap B^*$, 且

$$S^* = S^* \cap \overline{B} \subset \overline{\Omega} \backslash B^*,$$

并由 $W_{B^*}(M)$ 的定义可知，对 $\forall\, M \in S^*$, 有

$$W_{B^*}(M) = W(M) = V_B(M),$$

从而由 $W_{B^*}(M)$ 与 $V_B(M)$ 在 $B^* \cap B = B^*$ 内都是调和函数可知，对 $\forall\, M \in B^*$, 有

$$W_{B^*}(M) \leqslant V_B(M) = W(M).$$

第三种情形：球 B 全含在球 B^* 内.

此时 $B^* = (B^* \backslash B) \cup (B \cap B^*)$, 且

$$S^* = S^* \cap [\overline{\Omega} \backslash B],$$

并由 $V(M)$ 是上调和函数及 $W(M) = V_B(M)$ 可知，对 $\forall\, M \in S^* \cap \overline{\Omega} \backslash B$, 有

$$W_{B^*}(M) = W(M) = V_B(M) = V(M) = V_{B^*}(M),$$

故由 $W_{B^*}(M)$ 与 $V_{B^*}(M)$ 在 B^* 内都是调和函数可知，对 $\forall\, M \in \overline{B^*}$, 有

$$W_{B^*}(M) \leqslant V_{B^*}(M),$$

从而对 $\forall\, M \in B^* \backslash B$, 有

$$W_{B^*}(M) \leqslant V_{B^*}(M) \leqslant V(M) = V_B(M) = W(M).$$

另一方面，由于 $B^* \cap B = B$, 且 $B^* \cap B$ 的边界可表示为

$$\partial(B^* \cap B) = S \cap \overline{B^*},$$

故对 $\forall M \in S \cap \overline{B^*}$, 由 $M \in \overline{B^*} \backslash B$ 可得

$$W_{B^*}(M) \leqslant V_{B^*}(M) \leqslant V(M) = V_B(M) = W(M),$$

从而由 $W_{B^*}(M)$ 与 $V_B(M)$ 在 $B^* \cap B$ 内都是调和函数可知，对 $M \in B^* \cap B$. 有

$$W_{B^*}(M) \leqslant V_B(M) = W(M).$$

综上可知，对 $\forall M \in B^*$, 有

$$W_{B^*}(M) \leqslant W(M).$$

第四种情形：球 B^* 全含在球 B 的外部.

此时 $B^* = B^* \backslash B$, 且

$$S^* = S^* \cap [\overline{\Omega} \backslash B].$$

故由 $V(M)$ 是上调和函数及 $W(M) = V_B(M)$ 可知，对 $\forall M \in S^* \cap \overline{\Omega} \backslash B$. 有

$$W_{B^*}(M) = W(M) = V_B(M) = V(M) = V_{B^*}(M),$$

从而由 $W_{B^*}(M)$ 与 $V_{B^*}(M)$ 在 B^* 内都是调和函数可知，对 $\forall M \in B^* = B^* \backslash B$. 有

$$W_{B^*}(M) \leqslant V_{B^*}(M) \leqslant V(M) = V_B(M) = W(M).$$

综上可知，当 $V(M)$ 是 Ω 上的上调和函数时，对 $\forall B^* \subset \Omega$, 有

$$[V_B]_{B^*}(M) = W_{B^*}(M) \leqslant V_{B^*}(M) \quad (M \in \overline{\Omega}),$$

并由 $V(M) \in C(\overline{\Omega})$ 可知，$V_B(M) \in C(\overline{\Omega})$, 从而 $V_B(M)$ 也是上调和函数. ▌

性质 4.5.7 设函数 $g(M)$ 在 Ω 的边界 Γ 上连续，则 $g(M)$ 的任意一个上函数都不小于 $g(M)$ 任意一个下函数.

证明 设 $V(M)$ 是 $g(M)$ 的任意一个上函数，$W(M)$ 是 $g(M)$ 的任意一个下函数，则对 $\forall M \in \Gamma$, 有

$$W(M) \leqslant g(M) \leqslant V(M),$$

并由性质 4.5.2 及性质 4.5.3 可知，$V(M) - W(M)$ 是 Ω 上的上调和函数，故由性质 4.5.4 可知，$V(M) - W(M)$ 在 Γ 上取最小值，即对 $\forall M \in \Omega$, 有

$$V(M) - W(M) \geqslant \min_{M \in \Gamma}[V(M) - W(M)] \geqslant 0,$$

从而在 Ω 内，$V(M)$ 不小于 $W(M)$, 即对 $\forall M \in \Omega$, 有

$$V(M) \geqslant W(M).$$ ▌

性质 4.5.8 设 $V_1(M), V_2(M), \cdots, V_n(M)$ 都是 $g(M)$ 的上函数，则函数

$$V(M) = \min\{V_1(M), V_2(M), \cdots, V_n(M)\}$$

也是 $g(M)$ 的上函数.

性质 4.5.9 设 $V(M)$ 是 $g(M)$ 的上函数，则函数 $V_B(M)$ 也是 $g(M)$ 的上函数.

性质 4.5.8 及性质 4.5.9 的证明请读者自行完成.

4.5.2 上函数集的下确界函数

设 Γ 为区域 Ω 的边界， $g(M)$ 是定义在 Γ 上的连续函数，则对 $\forall M \in \Gamma$, 有

$$-\infty < \min_{P\in\Gamma} g(P) \leqslant g(M) \leqslant \max_{P\in\Gamma} g(P) < +\infty,$$

从而对 $\forall C \in \mathbb{R}$, 当 $\max\limits_{P\in\Gamma} g(P) \leqslant C$ 时，常值函数

$$V(M) = C, \quad M \in \overline{\Omega}$$

是 $g(M)$ 的一个上函数，当 $\min\limits_{P\in\Gamma} g(P) \geqslant C$ 时，常值函数

$$V(M) = C, \quad M \in \overline{\Omega}$$

是 $g(M)$ 的一个下函数.

由前面的讨论可知，由 $g(M)$ 的上函数全体构成的集合是非空的，称该集合为 $g(M)$ 的上函数集，记为 $\mathcal{U}_g$, 即

$$\mathcal{U}_g = \{V \mid V \in C(\overline{\Omega}) \text{ 是上调和函数，且 } V\big|_\Gamma \geqslant g\}.$$

另一方面，对 $\forall M \in \overline{\Omega}$ 及 $\forall V \in \mathcal{U}_g$, 有

$$V(M) \geqslant \min_{P\in\Gamma} g(P) > -\infty,$$

故由 V 的任意性可知，对 $\forall M \in \overline{\Omega}$, 有

$$\inf_{V\in\mathcal{U}_g} V(M) \geqslant \min_{P\in\Gamma} g(P) > -\infty,$$

从而根据下确界的唯一性，我们可以在 $\overline{\Omega}$ 上定义一个函数

$$U_g(M) = \inf_{V\in\mathcal{U}_g} V(M), \quad M \in \overline{\Omega},$$

称 $U_g(M)$ 为 $g(M)$ 的上函数集 (所有上函数) 的下确界函数，简称下确界函数.

下面证明：对 Ω 中的任意一个开球 $B(M^*)$, 存在 $\mathcal{U}_g$ 中的函数列 $\{u_n\}$, 使得每一个 u_n 在 Ω 内都是调和函数，且 $\{u_n\}$ 在 $B(M^*)$ 内一致收敛于 U_g.

事实上，对 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 由 U_g 的定义可知，存在 $V_n \in \mathcal{U}_g$, 使得

$$U_g(M^*) \leqslant V_n(M^*) < U_g(M^*) + \frac{1}{n},$$

故由性质 4.5.8 可知，对每一个 $n \in \mathbb{Z}^+$, 函数

$$W_n(M) = \min\{V_1(M), V_2(M), \cdots, V_n(M)\}$$

也是 $g(M)$ 的上函数，函数列 $\{W_n\}$ 在 $\overline{\Omega}$ 内单调减少，且对 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$U_g(M^*) \leqslant W_n(M^*) \leqslant V_n(M^*) < U_g(M^*) + \frac{1}{n},$$

再由性质 4.5.9 可知，函数 $u_n(M) = [W_n]_B(M) \in \mathcal{U}_g$ 在 $B(M^*)$ 内是调和函数，函数列 $\{u_n\}$ 在 $B(M^*)$ 内单调减少，并由

$$U_g(M^*) \leqslant u_n(M^*) \leqslant V_n(M^*) < U_g(M^*) + \frac{1}{n}$$

可知，数列 $\{u_n(M^*)\}$ 收敛于 $U_g(M^*)$, 从而由 Harnack 单调收敛定理可知，函数列 $\{u_n\}$ 在球 $B(M^*)$ 内一致收敛于某一调和函数 u, 且

$$u(M^*) = \lim_{n\to\infty} u_n(M^*) = U_g(M^*).$$

另一方面，如果存在 $P \in B(M^*)\backslash M^*$, 使得 $u(P) \neq U_g(P)$, 则由 $u_n \in \mathcal{U}_g$ 可得

$$u(P) = \lim_{n\to\infty} u_n(P) > U_g(P),$$

并由 $U_g(M)$ 的定义可知，存在 $V \in \mathcal{U}_g$, 使得 $V(M)$ 在 $B(M^*)$ 内是调和函数，且

$$U_g(P) < V(P) < U_P(P) < u(P),$$

从而由 $u(M) - V(M)$ 在 $B(M^*)$ 内连续可知，对于 $\eta = \dfrac{u(P) - V(P)}{2} > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $\overline{B_\delta(P)} \subset B(M^*)$, 且对 $\forall M \in \overline{B_\delta(P)}$, 有

$$u(M) - V(M) > \eta,$$

并由函数列 $\{u_n\}$ 在球 $B(M^*)$ 内一致收敛于 u 可知，对于 $\varepsilon = \dfrac{\eta\sigma}{4\pi\rho^2 - \sigma + 1} > 0$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 使得当 $n \geqslant N$ 时，对 $\forall M \in B(M^*)$, 有

$$u(M) - \eta < u_n(M) < u(M) + \varepsilon,$$

其中 $\rho = r_{PM^*}$, $B_\rho = B_\rho(M^*)$, $S_\rho = \partial B_\rho$, σ 表示小曲面 $S_\rho \cap \overline{B_\delta(P)}$ 的面积.

对上述取定的 η、δ、ρ、ε 及 N, 函数

$$H(M) = [\min\{u_N, V\}]_{B_\rho}(M)$$

是 $g(M)$ 的上函数，且 $H \in C(\overline{B_\rho})$ 在 B_ρ 内是调和函数，从而由平均值定理可得

$$\begin{aligned}
H(M^*) &= \frac{1}{4\pi\rho^2}\iint\limits_{S_\rho\setminus\overline{B_\delta(P)}} H(M)\mathrm{d}S + \frac{1}{4\pi\rho^2}\iint\limits_{S_\rho\cap\overline{B_\delta(P)}} H(M)\mathrm{d}S \\
&\leqslant \frac{1}{4\pi\rho^2}\iint\limits_{S_\rho\setminus\overline{B_\delta(P)}} u_N(M)\mathrm{d}S + \frac{1}{4\pi\rho^2}\iint\limits_{S_\rho\cap\overline{B_\delta(P)}} V(M)\mathrm{d}S \\
&\leqslant \frac{1}{4\pi\rho^2}\iint\limits_{S_\rho\setminus\overline{B_\delta(P)}} [u(M)+\varepsilon]\mathrm{d}S + \frac{1}{4\pi\rho^2}\iint\limits_{S_\rho\cap\overline{B_\delta(P)}} [u(M)-\eta]\mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{4\pi\rho^2}\iint\limits_{S_\rho} u(M)\mathrm{d}S + \frac{1}{4\pi\rho^2}[(4\pi\rho^2-\sigma)\varepsilon-\eta\sigma] \\
&= \frac{1}{4\pi\rho^2}\iint\limits_{S_\rho} u(M)\mathrm{d}S - \frac{\varepsilon}{4\pi\rho^2} < u(M^*) = U_g(M^*).
\end{aligned}$$

这与 $H\in\mathcal{U}_g$. 且 $U_g(M^*)\leqslant H(M^*)$ 矛盾，此矛盾说明，对 $\forall\, M\in B(M^*)$, 有

$$\lim_{n\to\infty} u_n(M) = u(M) = U_g(M).$$

综上可得

定理 4.5.1 设 Γ 为区域 Ω 的边界， $g(M)$ 在 Γ 上连续，则

$$U_g(M) = \inf_{v\in\mathcal{U}_g} v(M), \quad M\in\overline{\Omega}$$

在区域 Ω 内是调和函数，其中 $\mathcal{U}_g$ 为 $g(M)$ 的上函数集.

证明 对 $\forall\, M^*\in\Omega$, 由 Ω 是开集可知，存在 $R>0$, 使得 $B_R(M^*)\subset\Omega$, 故存在 $\mathcal{U}_g$ 中的函数列 $\{u_n\}$, 使得每一个 u_n 在 Ω 内是调和函数，且 $\{u_n\}$ 在 $B_R(M^*)$ 内一致收敛于调和函数 U_g, 从而由 M^* 的任意性可知， U_g 在 Ω 内是调和函数. ▮

4.5.3 Dirichlet 问题的解

由定理 4.5.1 可知，求解 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, & M\in\Omega, \\ u(M) = g(M), & M\in\Gamma \end{cases}$$

就转化为当 Γ 满足什么条件时，有 $U_g(M)\in C(\Gamma)$, 且对 $\forall\, M\in\Gamma$, 有

$$U_g(M) = g(M).$$

下面证明: 对 $\forall\, P\in\Gamma$, 如果点 P 为一个正规边界点, 即存在一个函数 $W_P(M)$, 使得 $W_P(M)$ 在 Ω 内是调和函数，在 $\overline{\Omega}$ 上连续，且对 $\forall\, M\in\overline{\Omega}$, 有

$$W_P(P) = 0, \quad W_P(M) > 0, \quad M\neq P,$$

则 g 的上函数集的下确界函数 U_g 在点 P 处连续，并且 $U_g(P) = g(P)$.

事实上，如果点 $P \in \Gamma$ 为正规边界点，则由 $g(M)$ 与 $W_P(M)$ 均在点 P 处连续可知，对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $M \in \Gamma_1 = B_\delta(P) \cap \Gamma$ 时，有

$$g(P) - \varepsilon < g(M) < g(P) + \varepsilon,$$

从而由 $W_P(M)$ 在 $\overline{\Omega}\backslash B_\delta(P)$ 上连续且 $W_P(M) > 0$ 可知，存在 $\eta_1 \geqslant \eta > 0$, 使得

$$0 < \eta = \min_{Q \in \overline{\Omega}\backslash B_\delta(P)} W_P(Q) \leqslant \eta_1 = \max_{Q \in \overline{\Omega}\backslash B_\delta(P)} W_P(Q).$$

另一方面，对上述的 ε, δ, η, 选取满足条件

$$g(P) - \varepsilon - C_1\eta_1 < \min_{Q \in \Gamma\backslash\Gamma_1} g(Q) \leqslant \max_{Q \in \Gamma\backslash\Gamma_1} g(Q) < g(P) + \varepsilon + C\eta$$

的常数 $C_1 > 0$ 和 $C > 0$, 作函数

$$f(M) = g(P) - \varepsilon - C_1 W_P(M) \quad (M \in \overline{\Omega})$$

和

$$h(M) = g(P) + \varepsilon + C W_P(M) \quad (M \in \overline{\Omega}),$$

则由 $W_P(M)$ 在 Ω 内是上调和函数可知， $f(M)$ 是下调和函数， $h(M)$ 是上调和函数，且对 $\forall\, M \in \Gamma$, 当 $M \in \Gamma\backslash\Gamma_1 \subset \overline{\Omega}\backslash B_\delta(P)$ 时，有

$$f(M) = g(P) - \varepsilon - C_1 W_P(M) \leqslant g(P) - \varepsilon - C_1\eta_1 \leqslant g(M),$$

$$h(M) = g(P) + \varepsilon + C W_P(M) \geqslant g(P) + \varepsilon + C\eta \geqslant g(M),$$

当 $M \in \Gamma_1$ 时，有

$$f(M) = g(P) - \varepsilon - C_1 W_P(M) \leqslant g(P) - \varepsilon < g(M),$$

$$h(M) = g(P) + \varepsilon + C W_P(M) \geqslant g(P) + \varepsilon > g(M),$$

故 $f(M)$ 是 $g(M)$ 的下函数， $h(M)$ 是 $g(M)$ 的上函数，从而由性质 4.5.7 可知，对 $\forall\, M \in \overline{\Omega}$, 有

$$g(P) - \varepsilon - C_1 W_P(M) = f(M) \leqslant U_g(M) \leqslant h(M) = g(P) + \varepsilon + C W_P(M).$$

综上可知，对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 有

$$g(P) - \varepsilon = f(P) \leqslant U_g(P) \leqslant h(P) = g(P) + \varepsilon,$$

当 $M \to P$ $(M \in \overline{\Omega}\backslash\{P\})$ 时，有

$$g(P) - \varepsilon \leqslant \varliminf_{M \to P} U_g(M) \leqslant \varlimsup_{M \to P} U_g(M) \leqslant g(P) + \varepsilon,$$

从而由 ε 的任意性可得

$$\lim_{M\to P} U_g(M) = g(P) = U_g(P),$$

即 $U_g(M)$ 在点 P 处连续，并且 $U_g(P) = g(P)$.

综上所述，可得如下定理：

定理 4.5.2 设 Γ 为区域 Ω 的边界， $g(M)$ 在 Γ 上连续. 如果点 $P \in \Gamma$ 是一个正规边界点，则函数

$$U_g(M) = \inf_{v\in\mathcal{U}_g} v(M), \quad M \in \overline{\Omega}$$

在点 P 处连续，并且 $U_g(P) = g(P)$. 其中 $\mathcal{U}_g$ 为 $g(M)$ 的上函数集.

定理 4.5.3 设 Γ 为区域 Ω 的边界， $g(M)$ 在 Γ 上连续. 如果 Γ 上的每一个点都是正规边界点，则 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, & (x, y, z) \in \Omega, \\ u(M) = g(M), & M \in \Gamma \end{cases}$$

的解存在.

由定理 4.5.3 可知，求解 Dirichlet 问题就转化为当 Γ 满足什么条件时， Γ 上的每一点都是正规边界点. 这里给出一种简单而常见的情况：如果 Ω 在点 $P \in \Gamma$ 处满足外球条件，且外球的球心为 $O \notin \overline{\Omega}$, 则

$$W_P(M) = \frac{1}{r_{PO}} - \frac{1}{r_{PM}} \quad (M \in \Omega)$$

在 Ω 内是调和函数，在 $\overline{\Omega}$ 上连续，且对 $\forall\, M \in \overline{\Omega}$, 有

$$W_P(P) = 0, \quad W_P(M) > 0, \quad M \neq P.$$

称满足此条件的函数 $W_P(M)$ 为 Ω 在点 P 处的闸函数.

下面的定理说明，定理 4.5.3 的逆定理也成立.

定理 4.5.4 设 Γ 为区域 Ω 的边界. 如果对 $g \in C(\Gamma)$, Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, & M \in \Omega, \\ u(M) = g(M), & M \in \Gamma \end{cases}$$

的解都存在，则 Γ 上的每一个点都是正规边界点.

证明 对 $\forall\, P \in \Omega$, 作函数

$$g(M) = r_{MP}, \quad M \in \Gamma,$$

则易知 $g \in C(\Gamma)$, 故由题设可知， Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, & M \in \Omega, \\ u(M) = g(M), & M \in \Gamma \end{cases}$$

存在一个解 $W_P(M)$, 即 $W_P(M) \in C(\overline{\Omega})$ 在 Ω 内是调和函数，且对 $\forall\, M \in \Gamma$, 有

$$W_P(P) = g(P) = 0, \quad W_P(M) = g(M) = r_{MP} > 0, \quad M \neq P.$$

从而由极值原理可知，对 $\forall\, M \in \overline{\Omega}$, 有

$$W_P(P) = g(P) = 0, \quad W_P(M) > 0, \quad M \neq P.$$

综上可知， Γ 上的每一个点都是正规边界点. ▌

对于二维情形， Perron 方法是同样适用的，只要把上面论述中的球改为圆就可以了. 下面的例子说明，如果有界区域 Ω 的边界不附加任何条件，则区域 Ω 上的 Dirichlet 问题不一定都有解.

例 4.5.1 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为去掉中心的单位圆， Γ 为 Ω 的边界. 则 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) = g(x, y), & (x, y) \in \Gamma \end{cases}$$

无解，其中

$$g(x, y) = \begin{cases} 0, & x^2 + y^2 = 1, \\ 1, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

证明 由对称性可知，该 Dirichlet 问题的解必须是

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

的函数，从而这种解具有以下形式

$$u(r) = a \ln r + b.$$

但是不可能有这样的常数 a, b, 使 u 在 Ω 的边界上等于 g.

这个例子也说明：对于 Ω 来说，点 $(0, 0)$ 不是正规边界点.

对于有界区域 Ω 上的 Poisson 方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u = f(x, y, z), & (x, y, z) \in \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = g, \end{cases} \tag{4.5.1}$$

如果能找出问题 (4.5.1) 中方程的一个特解 $U(x, y, z)$, 则函数

$$W(x, y, z) = u(x, y, z) - U(x, y, z)$$

满足 Laplace 方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta W = 0, \quad (x,y,z) \in \Omega, \\ W\big|_{\partial\Omega} = (g-U)\big|_{\partial\Omega}. \end{cases} \tag{4.5.2}$$

由此可知，如果方程 (4.5.1) 在 $\overline{\Omega}$ 存在一个连续的特解 U, 则当区域 Ω 的每一个边界点都是正规边界点时，由定理 4.5.2 可知， Dirichlet 问题 (4.5.2) 的解 W 存在，于是 Poisson 方程的 Dirichlet 问题 (4.5.1) 的解也存在.

关于特解的存在性，利用基本积分公式可知，如果 $f(P) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, 则

$$U(M) = \iiint\limits_{\Omega} \frac{f(P)}{r_{MP}} \mathrm{d}V \quad (M \in \Omega)$$

或

$$U(M) = \iint\limits_{\Omega} f(P) \ln \frac{\mu(P)}{r_{MP}} \mathrm{d}V \quad (M \in \Omega)$$

分别为三维或二维 Poisson 方程

$$\Delta U(M) = -4\pi f(M) \quad (M \in \Omega)$$

或

$$\Delta U(M) = -2\pi f(M) \quad (M \in \Omega)$$

的特解. 下面仅给出一个求特解的例子.

例 4.5.2 求 Poisson 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = x + y$$

的一个特解.

解 设所求特解为

$$f(x,y,z) = ax^3 + by^3,$$

将其代入方程得

$$6ax + 6by = x + y,$$

比较上式两端关于 x, y 的系数得 $a = b = \dfrac{1}{6}$, 从而

$$f(x,y,z) = \frac{1}{6}(x^3 + y^3)$$

是所给 Poisson 方程的一个特解.

习题　4.5

4.5.1　证明性质 4.5.3 及性质 4.5.8.

4.5.2　证明：如果函数 $V_1(M)$, $V_2(M)$, $\cdots$, $V_n(M)$ 都是 $f(M)$ 的下调和函数，则

$$V(M)=\max\{V_1(M),\ V_2(M),\ \cdots,\ V_n(M)\}$$

也是 $f(M)$ 的下调和函数.

4.5.3　证明：三维区域 Ω 内的下调和函数必在边界 $\partial\Omega$ 上取最大值.

4.5.4　设对平面区域 Ω 的某个边界点 P, 可在 Ω 外的某点 Q 为圆心作圆和边界 $\partial\Omega$ 相切于 P, 并使这个圆不包括 Ω 的其他点. 试证明 Ω 的这个边界点 P 有闸函数存在.

4.5.5　设 a, A 为常数，求解二维 Poisson 方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\Delta u(x,y)=Axy, & x^2+y^2<a^2,\\ u=0, & x^2+y^2=a^2.\end{cases}$$

4.5.6　验证二维对数势

$$u=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega} f(\xi,\eta)\ln\frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

是二维 Poisson 方程

$$\Delta u(x,y)=f(x,y)$$

的一个特解，其中 $f(x,y)$ 在有界区域 $\overline{\Omega}$ 上具有连续的一阶偏函数.

参考书目

[1] 姜礼尚，陈亚浙，刘西垣，等. 数学物理方程讲义 [M]. 第二版. 北京：高等教育出版社， 1996.

[2] 王明新. 数学物理方程 [M]. 北京：清华大学出版社， 2005.

[3] 谷超豪，等. 数学物理方程 [M]. 第二版. 北京：高等教育出版社， 2002.

[General Information]
□□=□□□□□□
□□=□□□□□□□□□□□□
□□=211
SS□=13628621
DX□=
□□□□=2014.06
□□□=□□□□□□□□